Gerhard Strey

h-g.strey@t-online.de
Grobstich@hs-nb.de
http://www.hs-nb.de

Hochschule Neubrandenburg
University of Applied Sciences
Studiengang Bauingenieurwesen
Ingenieurmathematik / Informatik

Reihen aus Werten der Riemannschen Zetafunktion

Bei der Beschäftigung mit der Verteilung von Primzahlen im Zusammenhang mit dem von Herrn Prof. Dr. GROBSTICH geleiteten Projekt zur Suche von Superprimzahlen wurde auch die Rolle der *Riemannsche Zetafunktion* in der Primzahltheorie behandelt.

Gelegentlich stieß ich dabei in der einschlägigen Literatur und in Formelsammlungen auf Reihen, deren Glieder Werte der Zetafunktion enthielten und deren Entstehung mein Interesse weckten.

Dieser Artikel beschreibt die Idee für einen Weg zur Erzeugung derartiger Reihen mit dem Augenmerk auf den Zusammenhang zwischen „erzeugenden“ und „erzeugten“ Funktionen.
Er enthält neben einer Sammlung von (in der Spezialliteratur(*) bekannten) Reihen auch einige Betrachtungen am Rande des Themas.

Neubrandenburg, Januar 2007 Gerhard Strey

(*) Zum Beispiel enthält folgende Monographie eine umfassende und unvergleichlich weitergehende Darstellung über den Stand der Forschung zu derartigen Reihen.

H.M. Srivastava and Junesang Choi
„Series Associated with the Zeta and Related Functions“ Dordrecht 2001

1. Das Transformationsprinzip

Der komplexen Potenzreihe (mit reellen Koeffizienten)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$$

wird die Potenzreihe

$$F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k$$

mit den reellen Parametern $\lambda > 0$ *und* μ *zugeordnet.*

$\zeta_*(x)$ ist die für <u>reelle</u> x definierte „modifizierte Zetafunktion“

$$\zeta_*(x) := \begin{cases} \zeta(x) & , \quad x > 0 \quad , \; x \neq 1 \\ \gamma & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

mit der Zetafunktion

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \,, \quad x > 1$$

$$\zeta(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \frac{N^{\,1-x}}{1-x} \right), \; 0 < x < 1$$

und der Euler-Konstanten

$$\gamma = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - ln(N) \right).$$

Die Definition $\zeta_*(1) := \gamma$ wird nahegelegt durch den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \frac{N^{\,1-x}}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - ln(N).$$

Die Definition $\zeta_*(x \leq 0) := 0$ befreit u.a. vor leidigen Fallunterscheidungen.

Die Transformation der <u>Originalfunktion</u> $f(z)$ *in die <u>Bildfunktion</u>* $F_{\lambda,\mu}(z)$ *wird mit dem Operatorsymbol* $\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}$ *beschrieben:*

$$\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}\{\, f(z) \,\} = F_{\lambda,\mu}(z).$$

Eine weitere Notation erfolgt mit dem Zuordnungspfeil

$$f(z) \;\bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,\mu}\; F_{\lambda,\eta}(z).$$

2. Einfache Eigenschaften der Transformation

2.1. Konvergenz

Die Konvergenzradien r, R von Original- und Bildreihe sind gleich: $r = R$.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \zeta(x)=1$ und $\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)=\zeta(\lambda\cdot k+\mu)$ für genügend großes k gilt

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|\cdot|\zeta_*(\lambda\cdot(k+1)+\mu)|}{|a_k|\cdot|\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=r\ .$$

$\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}$ operiert auf dem Konvergenzbereich der Reihen.

Im Inneren des Konvergenzkreises sind f und $F_{\lambda,\mu}$ analytische Funktionen und die Reihen normal konvergent. Also können die Glieder der Reihen beliebig umgeordnet werden und es gelten die Regeln der gliedweisen Differentiation und Integration. Auf dem Konvergenzkreis sind eventuell genauere Untersuchungen notwendig.

2.2. Elementare Transformationsregeln

Aus den Reihendarstellungen sind einige einfache Zuordnungsregel leicht ablesbar.

Mit $f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\eta}(z)$ und $g(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\eta}(z)$ ergeben sich die Regeln

R(1) $\quad z^n \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} \zeta_*(\lambda\cdot n+\mu)\cdot z^n \qquad n\geq 0\ ,\ ganzz.$

R(2) $\quad a\cdot f(z)+b\cdot g(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} a\cdot F_{\lambda,\mu}(z)+b\cdot G_{\lambda,\mu}(z)$

R(3) $\quad f(a\cdot z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(a\cdot z)$

R(4) $\quad u=z^n,\ \ g(z)=f(u) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=F_{n\cdot\lambda,\mu}(u) \qquad n>0\ ,\ ganzz.$

R(5) $\quad g(z)=z^n\cdot f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=z^n\cdot F_{\lambda,\mu+n\cdot\lambda}(z)$

R(6) $\quad a_k=0\ \ f\ddot{u}r\ \ k\leq m,\ \ a_m\neq 0\ ,\ m\geq 0\ ,\ ganzz.\ ,\ z\neq 0$

$$g(z)=\frac{1}{z^m}f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\frac{1}{z^m}F_{\lambda,\mu-m\cdot\lambda}(z)$$

R(7) $\quad g(z)=\frac{d}{dz}f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\frac{d}{dz}F_{\lambda,\mu-\lambda}(z)$

R(8) $\quad g(z)=\int f(z)\,dz \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\int F_{\lambda,\mu+\lambda}(z)\ dz$

Zum Beispiel gilt R(4) wegen

$$F_{n\cdot\lambda,\mu}(u)=\sum_k a_k\cdot\zeta_*(n\lambda\cdot k+\mu)\cdot u^k=\sum_k a_k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot nk+\mu)\cdot z^{n\cdot k}=G_{\lambda,\mu}(z)\ \text{mit}\ a_k=b_{n\cdot k}$$

und R(7) folgt aus

$$\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}\{f'(z)\}=\sum_k k\cdot a_k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot(k-1)+\mu)\cdot z^{k-1}=\frac{d}{dz}\sum_k a_k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu-\lambda)\cdot z^k=\frac{d}{dz}F_{\lambda,\mu-\lambda}(z)$$

usw.

3. Ermittlung der Bildfunktionen

3.1. Prinzipieller Ansatz

Die Original- und Bildreihen können wechselseitig sofort aufgestellt werden. Damit sind in der Regel aber noch nicht geschlossene Ausdrücke für die durch diese Reihen definierten Funktionen bekannt. Insbesondere gilt dies für den Bildbereich.

Es besteht also die Aufgabe, für wichtige Originalfunktionen f die Bildfunktionen $F_{\lambda,\mu}$ direkt aus f ohne Rückgriff auf die Reihendarstellung zu ermitteln. Ein prinzipieller Weg führt über die Verwendung des Doppelreihensatzes.

Sind $\lambda > 0$, μ und $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ gegeben und ist $k_0 = min\,\{k \mid \lambda \cdot k + \mu > 1 \,,\, k \geq 0\}$, so bilde man mit der Funktion

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \cdot z^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot z^k$$

die Summe

$$G(z,N) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{n^{\lambda \cdot k}} \cdot z^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\lambda \cdot k + \mu}} \cdot z^k \,.$$

(Man beachte, daß für $k_0 = 0$ die Summe $\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \cdot z^k$ leer ist, d.h. $g(z) = f(z)$ gilt.)

Der Grenzübergang $N \to \infty$ liefert die Bildfunktion von $g(z)$

$$\lim_{N \to \infty} G(z,N) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda \cdot k + \mu}} \cdot z^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = G_{\lambda,\mu}(z).$$

Da die auftetenden Zetareihen normal konvergent sind, ist die Vertauschung der Summation für alle z erlaubt, für die die Reihe von $f(z)$ normal konvergent ist, d.h. zumindest innerhalb des Konvergenzkreises.

Mit den Regeln R(1) und R(2) ist schließlich

$$F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k + G_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k \,.$$

Zusammenfassend lautet die Transformationsregel

R(9) Gegeben sind $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$, $\lambda > 0$, μ . $k_0 := min\,\{k \mid \lambda \cdot k + \mu > 1 \,,\, k \geq 0\}$.

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \cdot z^k \;\bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu}\; G_{\lambda,\eta}(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)$$

$$f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k + G_{\lambda,\mu}(z).$$

3.2. Anmerkungen zu den Bildfunktionen und Bildreihen

Das Problem im prinzipiellen Ansatz besteht in der Berechnung des Grenzwertes

$$G_{\lambda,\eta}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right).$$

Es ist zu erwarten, daß neben den ausführlich untersuchten höheren Funktionen auch neue Funktionen definiert werden. Häufig wird man sich auf geeignete Werte λ und μ beschränken müssen oder sogar nur Lösungen für ausgewählte z-Werte finden. Ist jedoch eine Zuordnung $f(z)\bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,\mu}F_{\lambda,\mu}(z)$ gefunden, so sind mit den Regeln R(1),...,R(8) weitere auffindbar.

Schließlich sind die Reihendarstellungen der Bildfunktionen an sich (mit Zetawerten in den Koeffizienten!), ohne Bezug zur Originalfunktion, interessant. So findet man z. B. durch Integration bzw. Differentiation der Reihen weitere derartige Reihendarstellungen.
Hier sei noch erwähnt, daß aus den Reihen von $f(z)$ und $F_{\lambda,\mu}(z)$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot[\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)-1]\cdot z^k=F_{\lambda,\mu}(z)-f(z)$$

entsteht, die bessere Konvergenzeigenschaften besitzt als $F_{\lambda,\mu}(z)$, denn relativ schnell konvergiert $[\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)-1]\to 0$.

3.3. Beispiel

Gegeben sind $f(z)=-ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot z^k$, $|z|\le 1,\ z\ne -1$ und $\lambda=1,\mu=0$.

Mit $k_0=min\{k\mid 1\cdot k+0>1\}=2$ ist

$$g(z)=-ln(1+z)-\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^k}{k}\cdot z^k=-ln(1+z)+z=ln\left(\frac{e^z}{1+z}\right)$$

und $$G_{1,0}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^0}\cdot g\left(\frac{z}{n^1}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}ln\left(\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}\right)=\lim_{N\to\infty}ln\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}\right)$$

$$G_{1,0}(z)=ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}\right)\overset{!}{=}ln\left[z\cdot\Gamma(z)\cdot e^{\gamma\cdot z}\right]=ln\Gamma(1+z)+\gamma\cdot z\quad.$$

Damit ist $F_{1,0}(z)=\frac{-1}{1}\cdot\zeta_*(1)\cdot z+G_{1,0}(z)=-\gamma\cdot z+ln\Gamma(1+z)+\gamma\cdot z=ln\Gamma(1+z)$, d. h.

$$-ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot z^k\ \bullet\!\!\xrightarrow{1,0}\ ln\Gamma(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\zeta_*(k)\cdot z^k\ ,\ |z|\le 1,\ z\ne -1$$

und $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot[\zeta_*(k)-1]\cdot z^k=ln\Gamma(1+z)+ln(1+z)=ln\Gamma(2+z).$$

3.4. Das Grenzverhalten der Bildreihen für $\lambda \to \infty$

Sei der Koeffizient $a_0 = 0$, dann gilt folgender Satz:

Die Bildreihen $F_{\lambda,\mu}(z)$ konvergieren für $\lambda \to \infty$ gegen die Originalreihe $f(z)$.
Die Konvergenz ist in jedem abgeschlossenen Kreis mit dem Radius $\rho < r$ gleichmäßig.

Diese Aussage wird mit der Bezeichnung $F_{\infty,\mu}(z) := \lim\limits_{\lambda\to\infty} F_{\lambda,\mu}(z)$ als Regel formuliert:

R(10) $\qquad f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot z^k \;\bullet\!\!\xrightarrow{\lambda\to\infty,\mu}\; F_{\infty,\mu}(z) = f(z).$

Beweis:
Wir bilden eine beliebige Folge $F_{\lambda_m,\mu}$ mit $\lambda_m = (\lambda_{m-1} + r_m) \to \infty$, $r_m > 0$, $m = 1,2,...$.

Für hinreichend großes λ_0 ist dann $F_{\lambda_m,\mu}(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) \cdot z^k$.

Es ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein m_0 existiert, so dass für alle $m > m_0$ folgende Abschätzung gilt

$$\left| F_{\lambda_m,\mu}(z) - f(z) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot [\zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) - 1] \cdot z^k \right| < \varepsilon .$$

Wegen $\quad [\zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) - 1] = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda_m \cdot k + \mu}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{r_m \cdot k}} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_{m-1} \cdot k + \mu}}$

$$< \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda_{m-1} \cdot k + \mu}} = \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_{m-1} \cdot k + \mu) - 1]$$

$$< \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot \frac{1}{2^{r_{m-1} \cdot k}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2^{r_1 \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1]$$

und $\quad \sum\limits_{i=1}^{m} r_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_m - \lambda_0$

folgt $\quad \left| F_{\lambda_m,\mu}(z) - f(z) \right| < \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2^{(\lambda_m - \lambda_0) \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1] \cdot z^k \right|$

$$< \frac{1}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot \left| \zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1 \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k \right| = \frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot \left| f(z) \right| .$$

Offensichtlich existiert ein $m_0 = m_0(\varepsilon, z)$ mit $\frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot \left| f(z) \right| < \varepsilon$ für $m > m_0$.

Für $|z| \le \rho < r$ ist $f(z)$ beschränkt, $|f(z)| < M$, d. h. es existiert ein von z unabhängiges m_0 mit $\frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot M < \varepsilon$. Die Konvergenz ist gleichmäßig.

4. Bildfunktionen der Logarithmusreihe

4.1. Die Zuordnung $\mathbf{Z}_{\lambda,\,0}\{-\boldsymbol{ln}(\mathbf{1}-\mathbf{z})\}$

4.1.1. Die allgemeine Lösung

Gegeben sind $f(z) = -ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot z^k$, $|z| \le 1,\, z \ne 1$ und $\lambda > 0$, $\mu = 0$.

Mit $k_0 = min\{k \mid \lambda \cdot k + 0 > 1\} = [\lambda^{-1}] + 1$ und $s(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \frac{1}{k} \cdot z^k$

folgt $g(z) = -ln(1-z) - s(z,\lambda) = -ln\left((1-z)\cdot e^{s(z,\lambda)}\right)$,

$$G_{\lambda,0}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} ln\left[\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right)}\right] = -ln\, P_0(z,\lambda)$$

mit dem Weierstraß-Produkt

$$\underline{P_0(z,\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right)}} \quad , \quad s\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right) = \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{z}{n^\lambda}\right)^k .$$

Das Produkt definiert eine ganze Funktion wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n^\lambda}\right|^{k_0} = |z|^{k_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot k_0}} = |z|^{k_0} \cdot \zeta(\lambda\cdot k_0) < \infty, \text{ denn } \lambda\cdot k_0 > 1 .$$

Die gesuchte Bildfunktion ist mit Hilfe von $P_0(z,\lambda)$ darstellbar

$$F_{\lambda,0}(z) = \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k - ln\, P_0(z,\lambda) \quad .$$

Die Transformationsregel lautet

$$-ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot z^k \quad \bullet\!\xrightarrow{\lambda,0} \quad \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k - ln\, P_0(z,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k$$

$$|z| \le 1,\, z \ne 1 \quad .$$

4.1.2. Eigenschaften der Funktion $P_0(z,\lambda)$

a) Für $\underline{\lambda > 1}$ gilt $$P_0(z,\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^{\lambda}}\right)$$

$$P_0(z,\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k \cdot z^k\ ,\quad a_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \infty} \frac{1}{(i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k)^{\lambda}}$$

b) Für $\underline{\lambda = 1}$ gilt $$P_0(z,1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}} = \frac{e^{\gamma \cdot z}}{\Gamma(1-z)} \qquad \text{(Weierstraß)}$$

c) Für $\underline{\lambda = 1/m}$ $m = 2,3,\ldots$ gilt

$$P_0\left(z, \frac{1}{m}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\sqrt[m]{n}}\right)\cdot e^{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{z}{\sqrt[m]{n}}\right)^k}\ .$$

d) Für alle $\underline{\lambda > 0}$ gilt die Verdoppelungsformel:

$$\underline{P_0(-z,\lambda)\cdot P_0(z,\lambda) = P_0\left(z^2, 2\cdot\lambda\right)}\ .$$

e) Für alle $\underline{\lambda > 0}$ gilt

$$P_0\left(\frac{z}{2^{\lambda}}, \lambda\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{(2\cdot n)^{\lambda}}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{(2\cdot n)^{\lambda}},\lambda\right)}$$

$$\frac{P_0(z,\lambda)}{P_0\left(\frac{z}{2^{\lambda}},\lambda\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{(2\cdot n-1)^{\lambda}}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{(2\cdot n-1)^{\lambda}},\lambda\right)}$$

Beweise:

d) Für $2\cdot m \le \left[\lambda^{-1}\right] \le 2\cdot m + 1$ gilt $\left[\frac{\lambda^{-1}}{2}\right] = \left[(2\cdot\lambda)^{-1}\right] = m$. Daraus folgt weiter

$$\sum_{k=1}^{\left[\lambda^{-1}\right]}\frac{1}{k\cdot n^{\lambda\cdot k}}\cdot\left[z^k + (-z)^k\right] = \sum_{k=1}^{\left[(2\cdot\lambda)^{-1}\right]}\frac{1}{2\cdot k}\cdot\frac{1}{n^{\lambda\cdot 2\cdot k}}\cdot 2\cdot z^{2\cdot k} = s\left(\frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}},\lambda\right).$$

Also gilt $$P_0(-z,\lambda)\cdot P_0(z,\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^{\lambda}}\right)\cdot\left(1 + \frac{z}{n^{\lambda}}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{n^{\lambda}},\lambda\right) + s\left(\frac{-z}{n^{\lambda}},\lambda\right)}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}},\lambda\right)} = P_0\left(z^2, 2\cdot\lambda\right).$$

a) Mit $a_k(m) = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \frac{1}{(i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k)^\lambda}$ folgt durch vollständige Induktion nach *m*

$$\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \cdot a_k(m) \cdot z^k .$$

Denn wegen $a_k(m) + a_{k-1}(m) \cdot \frac{1}{(m+1)^\lambda} = a_k(m+1)$, $a_0(m) := 1$, $a_{m+1}(m) := 0$, gilt

$$\prod_{n=1}^{m+1}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right) = \left(1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \cdot a_k(m) \cdot z^k\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{(m+1)^\lambda}\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k \cdot \left(a_k(m) + a_{k-1}(m) \cdot \frac{1}{(m+1)^\lambda}\right) \cdot z^k = 1 + \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k \cdot a_k(m+1) \cdot z^k .$$

Mit $a_k = \lim\limits_{m\to\infty} a_k(m)$ und $P_0(z,\lambda) = \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{m}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)$ folgt die Behauptung

(für alle z aus dem Konvergenzbereich der Reihe).

b) Folgt aus der Literatur.
e) Die erste Formel ist klar. In der zweiten sind Faktoren mit geradem Index gekürzt.

Anmerkungen:

1) Aus der Verdoppelungsformel folgt

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)\cdot\Gamma(1-z)} = P_0(-z,1)\cdot P_0(z,1) = P_0\left(z^2,2\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi \cdot z} \quad \text{(Euler).}$$

2) Aus **e)** folgt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2\cdot n-1)^2}\right) = \frac{P_0\left(z^2,2\right)}{P_0\left((z/2)^2,2\right)} = \frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z}\cdot\frac{\pi/2\cdot z}{\sin(\pi/2\cdot z)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right).$$

3) Der Koeffizientenvergleich der Reihenentwicklung **a)** mit der Taylorreihe des Sinus

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k \cdot z^{2\cdot k} = P_0\left(z^2,2\right) = \frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{\pi^{2\cdot k}}{(2\cdot k+1)!}\cdot z^{2\cdot k}$$

liefert die Summenformeln $\underline{\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \infty} \frac{1}{(i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k)^2} = \frac{\pi^{2\cdot k}}{(2\cdot k+1)!}}$

$$\zeta(2) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{3!}$$

$$\sum_{1\le i<j}\frac{1}{(i\cdot j)^2} = \frac{1}{(1\cdot 2)^2}+\frac{1}{(1\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{1}{(2\cdot 3)^2}+\frac{1}{(2\cdot 4)^2}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot 4)^2}+\frac{1}{(3\cdot 5)^2}+\ldots = \frac{\pi^4}{5!}.$$

4.2. Die Zuordnung $\mathbf{Z}_{\lambda,-1}\{-\boldsymbol{ln}(\mathbf{1}-\mathbf{z})\}$

4.2.1. Die allgemeine Lösung

Gegeben sind $f(z)=-ln(1-z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot z^k$, $|z|\le 1,\ z\ne 1$ und $\lambda>0$, $\mu=-1$.

Mit $k_0=min\{k \mid \lambda\cdot k-1>1\}=\lfloor 2\cdot\lambda^{-1}\rfloor+1$ und $s\left(z,\frac{\lambda}{2}\right):=\sum_{k=1}^{\lfloor 2\cdot\lambda^{-1}\rfloor}\frac{1}{k}\cdot z^k$

folgt $g(z)=-ln(1-z)-s(z,\lambda/2)=-ln\left((1-z)\cdot e^{s(z,\lambda/2)}\right)$,

$$G_{\lambda,0}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} n\cdot g\left(\frac{z}{n^\lambda}\right)=-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} ln\left[\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{n^\lambda},\frac{\lambda}{2}\right)}\right]^n=-ln\,P_{-1}(z,\lambda)$$

mit dem Weierstraß-Produkt

$$\underline{P_{-1}(z,\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)^n\cdot e^{n\cdot s\left(\frac{z}{n^\lambda},\frac{\lambda}{2}\right)}}\quad,\quad s\left(\frac{z}{n^\lambda},\frac{\lambda}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\lfloor 2\cdot\lambda^{-1}\rfloor}\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{z}{n^\lambda}\right)^k .$$

Das Produkt definiert eine ganze Funktion wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left|\frac{z}{n^\lambda}\right|^{k_0}=|z|^{k_0}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot k_0-1}}=|z|^{k_0}\cdot\zeta(\lambda\cdot k_0-1)<\infty,\ \text{denn}\ \lambda\cdot k_0-1>1.$$

Die gesuchte Bildfunktion ist mit Hilfe von $P_{-1}(z,\lambda)$ darstellbar

$$F_{\lambda,-1}(z)=\sum_{k=1}^{\lfloor 2\cdot\lambda^{-1}\rfloor}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k-1)\cdot z^k-ln\,P_{-1}(z,\lambda)\quad .$$

Die Transformationsregel lautet

$$-ln(1-z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot z^k \;\bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,-1}\; \sum_{k=1}^{\lfloor 2\cdot\lambda^{-1}\rfloor}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k-1)\cdot z^k-ln\,P_{-1}(z,\lambda)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k-1)\cdot z^k\qquad |z|\le 1,\ z\ne 1$$

4.2.2. Eigenschaften der Funktion $P_{-1}(z\,,\,\lambda)$

a) Für $\underline{\lambda > 2}$ gilt $\quad P_{-1}(z,\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^{\lambda}}\right)^{n}$

b) Für $\underline{\lambda = 2}$ gilt $\quad P_{-1}(z,2) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^{2}}\right)^{n}\cdot e^{\frac{z}{n}}$

c) Für $\underline{\lambda = 1}$ gilt $\quad P_{-1}(z,1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n}\cdot e^{z+\frac{1}{2\cdot n}\cdot z^2}$

d) Für alle $\underline{\lambda > 0}$ gilt die Verdoppelungsformel:

$$\underline{P_{-1}(-z,\,\lambda)\cdot P_{-1}(z,\,\lambda) = P_{-1}\left(\,z^2\,,\,2\cdot\lambda\right)}$$

e) Funktionalgleichungen für $\underline{\lambda = 1\ ,\ 2}$

$$\underline{P_{-1}(1+z\,,1) = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{\Gamma(-z)}\cdot exp\left(\frac{\gamma}{2}+(1+\gamma)\cdot z\right)\cdot P_{-1}(z\,,1)}$$

$$P_{-1}(1-z\,,1)\cdot P_{-1}(1+z\,,1) = -2\cdot z\cdot sin(\pi\cdot z)\cdot e^{\gamma}\cdot P_{-1}\left(z^2\,,\,2\right)$$

Beweise:

e) $$\frac{P_{-1}(1+z,1)}{P_{-1}(z,1)} = \lim_{N\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n-1-z}{n-z}\right)^{n}\cdot e^{1+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{z}{n}}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{-z\cdot(1-z)^2\cdot(2-z)^3\cdot\ldots\cdot(N-1-z)^N}{(1-z)^1\cdot(2-z)^2\cdot\ldots\cdot(N-1-z)^{N-1}\cdot(N-z)^N}\cdot e^{N+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(N-z)}{\Gamma(-z)}\cdot\frac{e^N}{(N-z)^N}\cdot e^{\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-ln(N)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)+ln(N)\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)}$$

$$= \frac{e^z}{\Gamma(-z)}\cdot\left[\lim_{N-z\to\infty}\frac{\Gamma(N-z)\cdot e^{N-z}}{(N-z)^{N-z-1/2}}\right]\cdot\lim_{N\to\infty}e^{-ln(N-z)\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)+ln(N)\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)}\cdot e^{\gamma\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)}$$

und mit Anwendung der Stirligschen Formel auf den Grenzwert [...]

$$= \frac{e^{z+\gamma\cdot\left(\frac{1}{2}+z\right)}}{\Gamma(-z)}\cdot\left[\sqrt{2\cdot\pi}\right]\cdot\lim_{N\to\infty}e^{\left(\frac{1}{2}+z\right)\cdot ln\left(\frac{N}{N-z}\right)} = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{\Gamma(-z)}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}+(1+\gamma)\cdot z}\cdot e^{0}\quad .$$

Die zweite Formel folgt mit Hilfe von **d)**. Die Herleitung für **d)** erfolgt analog zu **4.1.2.**

4.3. Die Zuordnung $\mathbf{Z}_{\lambda,\,0}\left\{\left(\dfrac{\mathbf{z}}{\mathbf{1-z}}\right)\right\}$

4.3.1. Die Transformationsregel

Durch die Anwendung der allgemeinen Transformationsregeln auf $f(z)=-ln(1-z)$ erhält man die (erwartete) Transformationregel für $|z|\leq 1,\, z\neq 1$

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{k=1}^{\infty} z^k \quad \bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,0} \quad \sum_{k=1}^{\left[\lambda^{-1}\right]}\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k - z\cdot\frac{P_0'(z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k$$

Nach R(7) gilt $\quad g(z)=\dfrac{d}{dz}f(z)=\dfrac{1}{1-z} \quad \bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,\lambda} \quad G_{\lambda,\lambda}(z)=\dfrac{d}{dz}F_{\lambda,0}(z)$

und mit R(5) $\quad h(z)=z\cdot g(z)=\dfrac{z}{1-z} \quad \bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,0} \quad H_{\lambda,0}(z)=z\cdot G_{\lambda,\lambda}(z)=z\cdot\dfrac{d}{dz}F_{\lambda,0}(z)$.

Aus **4.1.1.** folgt dann

$$H_{\lambda,0}(z)=z\cdot\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=1}^{\left[\lambda^{-1}\right]}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k - ln\,P_0(z,\lambda)\right]=\sum_{k=1}^{\left[\lambda^{-1}\right]}\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k - z\cdot\frac{P_0'(z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)}.$$

4.3.2. Die logarithmische Ableitung von $P_0(z,\lambda)$

Es gilt $\quad Q_0(z,\lambda):=\dfrac{P_0'(z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)}=\dfrac{d}{dz}ln\,P_0(z,\lambda)=\dfrac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left[s\left(\dfrac{z}{n^\lambda},\lambda\right)+ln\left(1-\dfrac{z}{n^\lambda}\right)\right]$.

a) Für $\underline{\lambda>1}$ folgt $\quad Q_0(z,\lambda)=\dfrac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1-\dfrac{z}{n^\lambda}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z-n^\lambda}$

b) Für $\underline{\lambda=2}$ gilt $\quad Q_0(z,2)=\dfrac{d}{dz}\left(ln\,sin\left(\pi\cdot\sqrt{z}\right)-ln\left(\pi\cdot\sqrt{z}\right)\right)=\dfrac{\pi}{2\cdot\sqrt{z}}\cdot cot\left(\pi\cdot\sqrt{z}\right)-\dfrac{1}{2\cdot z}$

$$Q_0\left(z^2,2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}=\frac{1}{2\cdot z}\cdot\left(\pi\cdot cot(\pi\cdot z)-\frac{1}{z}\right)$$

c) Für $\underline{\lambda=1}$ gilt $\quad Q_0(z,1)=\dfrac{d}{dz}(\gamma\cdot z-ln\,\Gamma(1-z))=\gamma+\dfrac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)}=\gamma+\psi(1-z)$

4.3.3. Anmerkungen zur Digammafunktion

1) Aus $$\Gamma(1-z) = e^{\gamma \cdot z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{z}{n}}$$

folgt $$\ln\Gamma(1-z) = \gamma \cdot z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right]$$

$$\underline{\psi(1-z) = \frac{d}{dz} \ln\Gamma(1-z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n-z} - \frac{1}{n} \right]}$$

2) Spezielle Werte sind $\underline{\psi(1) = -\gamma\ , \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \cdot \ln(2)}$.

Denn es gelten $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right] = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{2 \cdot n - 1} - \frac{2}{2 \cdot n} \right] = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3) Aus $$\frac{d}{dz} \ln[\Gamma(1+z) \cdot \Gamma(1-z)] = \frac{d}{dz} \ln[z \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)] = \frac{d}{dz} \ln \frac{\pi \cdot z}{\sin(\pi \cdot z)}$$

folgt $$\psi(1+z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} + \psi(z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \cdot \cot(\pi \cdot z)\ , \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

d. h. $$\underline{\psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z)}\ , \quad \underline{\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \cdot \cot(\pi \cdot z)}$$

$$\underline{\psi(1+z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \cdot \cot(\pi \cdot z)}$$

4) Durch Induktion folgt $\underline{\psi(n+z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+z} + \psi(z)}$.

Zum Beispiel $$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1} - \gamma - 2 \cdot \ln(2).$$

5) Für $z = 0$ hat $\psi(z)$ einen einfachen Pol und es gilt mit 3), da ψ stetig ist,

$$\underline{\lim_{z \to 0} z \cdot \psi(z)} = \lim_{z \to 0} [-1 + z \cdot \psi(1+z)] = \underline{-1}\ .$$

4.4. Zusammenstellung von Bildreihen mit einfachen Bildfunktionen

4.4.1. Verwendung der Reihe $\mathbf{Z}_{1,\,0}\{-\boldsymbol{ln}(\mathbf{1}-\mathbf{z})\}$

Für $\quad f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot z^k=z+\frac{1}{2}\cdot z^2+\frac{1}{3}\cdot z^3+\ldots=-ln(1-z)$ und $|z|\le 1$, $z\ne 1$

gilt nach **4.1.1.** und **4.1.2. b)**

$$F_{1,0}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(k)\cdot z^k=\gamma\cdot z-ln\,P_0(z,1)=\gamma\cdot z-ln\frac{e^{\gamma\cdot z}}{\Gamma(1-z)}=ln\,\Gamma(1-z).$$

Wegen $\zeta_*(1)=\gamma$ folgt

$$\textbf{(1)}\qquad \underline{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta(k)\cdot z^k=\frac{1}{2}\cdot\zeta(2)\cdot z^2+\frac{1}{3}\zeta(3)\cdot z^3+\frac{1}{4}\zeta(4)\cdot z^4+\ldots=-\gamma\cdot z+ln\,\Gamma(1-z)}\ .$$

Zum Beispiel gilt für $z:=-1$, $z:=\frac{1}{2}$, $z:=-\frac{1}{2}$ wegen $\Gamma(2)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\textbf{(1a)}\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\zeta(k)=\frac{1}{2}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{3}\zeta(3)+\frac{1}{4}\zeta(4)-+\ \ldots=\gamma$$

$$\textbf{(1b)}\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}\cdot\zeta(k)=\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{3\cdot 8}\zeta(3)+\frac{1}{4\cdot 16}\zeta(4)-+\ldots=-\frac{\gamma}{2}+ln\left(\sqrt{\pi}\right)$$

$$\textbf{(1c)}\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 2^k}\cdot\zeta(k)=\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{3\cdot 8}\zeta(3)+\frac{1}{4\cdot 16}\zeta(4)-+\ \ldots=\frac{\gamma}{2}+ln\left(\sqrt{\pi}\right)-ln(2)$$

und mit (1b) + (1c) = (1d) , (1b) – (1c) = (1e)

$$\textbf{(1d)}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 4^k}\cdot\zeta(2\cdot k)=\frac{1}{1\cdot 4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{2\cdot 16}\zeta(4)+\frac{1}{3\cdot 64}\zeta(6)+\ \ldots=ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textbf{(1e)}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\cdot 4^k}\cdot\zeta(2k+1)=\frac{1}{3\cdot 4}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{5\cdot 16}\zeta(5)+\frac{1}{7\cdot 64}\zeta(7)+\ \ldots=ln(2)-\gamma$$

Allgemeiner gilt , (vgl. auch die Verdoppelungsformel aus **4.1.2.** nebst Anmerkung),
für $\left|z^2\right|\le 1$, $z^2\ne 1$

$$F_{1,0}(z)+F_{1,0}(-z)=2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\cdot\zeta_*(2k)\cdot z^{2\cdot k}=ln[\Gamma(1-z)\cdot\Gamma(1+z)]=ln\frac{\pi\cdot z}{sin(\pi\cdot z)}=F_{2,0}\left(z^2\right),$$

$$\textbf{(2)}\qquad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k}=\zeta(2)\cdot z^2+\frac{1}{2}\zeta(4)\cdot z^4+\frac{1}{3}\zeta(6)\cdot z^6+\ldots=ln\frac{\pi\cdot z}{sin(\pi\cdot z)}}\ .$$

Zum Beispiel folgt für $z := \frac{1}{2}$ wiederum **(1d)** und für $z := \frac{1}{6}$

(2a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 6^{2\cdot k}} \cdot \zeta(2\cdot k) = \frac{1}{1\cdot 6^2}\zeta(2) + \frac{1}{2\cdot 6^4}\zeta(4) + \frac{1}{3\cdot 6^6}\zeta(6) + \ldots = ln\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Für $z := i \cdot z$, d. h. $z^2 := -z^2$, entsteht wegen $sin(i\cdot\pi\cdot z) = i \cdot sinh(\pi\cdot z)$

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2 - \frac{1}{2}\zeta(4)\cdot z^4 + \frac{1}{3}\zeta(6)\cdot z^6 - + \ldots = ln\frac{\pi\cdot z}{sinh(\pi\cdot z)}$$

Aus der Differenz

$$F_{1,0}(z) - f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta_*(k)-1)\cdot z^k = ln\Gamma(1-z) + ln(1-z) = ln[(1-z)\Gamma(1-z)] = ln\Gamma(2-z)$$

ergeben sich gut konvergierenden Reihen ($|z| \le 1$):

(4) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta(k)-1)\cdot z^k = \frac{\zeta(2)-1}{2}\cdot z^2 + \frac{\zeta(3)-1}{3}\cdot z^3 + \ldots = (1-\gamma)\cdot z + ln\Gamma(2-z)} \, .$$

Der einfachen Abschätzung

$$\zeta(k+1) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\cdot n^k} = \frac{1}{2}\cdot(\zeta(k)-1) < \frac{1}{2^{k-1}} \;,\; k > 1$$

entnimmt man die gute Konvergenz und auch, dass die Reihe für $z = 1$ konvergiert.

(Die rechte Ungleichung ergibt sich durch Induktion und $\zeta(2) - 1 < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1$).

Also gilt z. B. für $z = \pm 1$ und mit (4c) = (4a) + (4b) , (4d) = (4a) – (4b) , (4e) = (1a) + (4a)

(4a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta(k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{2} + \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(4)-1}{4} + \ldots = 1-\gamma$$

(4b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot(\zeta(k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{2} - \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(4)-1}{4} - + \ldots = ln(2) - 1 + \gamma$$

(4c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta(2\cdot k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{1} + \frac{\zeta(4)-1}{2} + \frac{\zeta(6)-1}{3} + \ldots = ln(2)$$

(4d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot(\zeta(2k+1)-1) = \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(5)-1}{5} + \frac{\zeta(7)-1}{7} + \ldots = 1 - \gamma - ln\sqrt{2}$$

(4e) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\left(\zeta(2\cdot k) - \frac{4k+1}{4k+2}\right) = \frac{\zeta(2)-5/6}{1} + \frac{\zeta(4)-9/10}{2} + \frac{\zeta(6)-13/14}{3} + \ldots = 1 \, .$$

4.4.2. Verwendung der Reihe $\mathbf{Z}_{\lambda,\,0}\left\{\left(\dfrac{\mathbf{z}}{\mathbf{1-z}}\right)\right\}$

Für $\quad h(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k = z+z^2+z^3+\ldots=\dfrac{z}{1-z}$ und $|z|\le 1$, $z\ne \pm 1$

gilt nach **4.3.1.** und **4.3.2. b)**

$$H_{2,0}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_*(2\cdot k)\cdot z^k = -z\cdot Q_0(z,2)=-z\cdot\left(\frac{\pi}{2\cdot\sqrt{z}}\cdot cot\left(\pi\cdot\sqrt{z}\right)-\frac{1}{2\cdot z}\right).$$

(5*) $$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2\cdot k)\cdot z^k = \zeta(2)\cdot z+\zeta(4)\cdot z^2+\zeta(6)\cdot z^3+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\pi\sqrt{z}\cdot cot\left(\pi\sqrt{z}\right)\right]$$

Für $z:=z^2$ gilt für $|z|\le 1$, $z\ne\pm 1$

(5) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2+\zeta(4)\cdot z^4+\zeta(6)\cdot z^6+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\left[1-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)\right]}$$

Dies folgt auch sofort aus der mit $z/2$ multiplizieren Ableitung der Reihe **(2)** !

Aus (**4.3.2. b)**) ergibt sich die Beziehung

(5a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2} \quad .$$

Zum Beispiel erhält man aus (5) für $z:=1/2$, $z:=1/4$ die Reihen (5b), (5c), (5d) = (5b) - (5c)

(5b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\zeta(2\cdot k)=\frac{1}{4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{16}\cdot\zeta(4)+\frac{1}{64}\cdot\zeta(6)+\ldots=\frac{1}{2}$$

(5c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2\cdot k}}\zeta(2\cdot k)=\frac{1}{4^2}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{16^2}\cdot\zeta(4)+\frac{1}{64^2}\cdot\zeta(6)+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

(5d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k-1}{4^{2k}}\zeta(2\cdot k)=\frac{3}{4^2}\cdot\zeta(2)+\frac{15}{16^2}\cdot\zeta(4)+\frac{63}{64^2}\cdot\zeta(6)+\ldots=\frac{\pi}{8}$$

Mit $z:=i\,z$ folgen aus (5) mit $cot(i\cdot\pi\cdot z)=-i\cdot coth(\pi\cdot z)$ die Reihen (6) und (7) = (5)+(6)

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2-\zeta(4)\cdot z^4+-\ldots=\frac{1}{2}\cdot\left[\pi\cdot z\cdot coth(\pi\cdot z)-1\right]$$

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(4k-2)\cdot z^{4\cdot k-2} = \zeta(2)\cdot z^2+\zeta(6)\cdot z^6+\ldots=\frac{\pi}{4}\cdot z\cdot\left[coth(\pi z)-cot(\pi z)\right]$$

Zum Beispiel ergibt sich aus (7) für $z:=1/2$

(7a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k-1}}\zeta(4k-2)=\frac{1}{4^1}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{4^3}\cdot\zeta(6)+\frac{1}{4^5}\cdot\zeta(10)+\ \ldots=\frac{\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Für $\quad h(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k = z+z^2+z^3+\ldots=\frac{z}{1-z}$ und $|z|\le 1$, $z\ne\pm 1$

gilt nach **4.3.1.** und **4.3.2. c)**

$$H_{1,0}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_*(k)\cdot z^k = \zeta_*(1)\cdot z - z\cdot Q_0(z,1)=\gamma\cdot z - z\cdot(\gamma+\psi(1-z))=-z\cdot\psi(1-z).$$

(8) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty}\zeta(k)\cdot z^k = \zeta(2)\cdot z^2+\zeta(3)\cdot z^3+\zeta(4)\cdot z^4+\ldots=-z\cdot\psi(1-z)-\gamma\cdot z}$$

Dies folgt auch sofort aus der mit z multiplizierten Ableitung der Reihe **(1)** !

Für $z:=-z$ folgt $(z\ne\pm 1)$

(9) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)\cdot z^k = \zeta(2)\cdot z^2-\zeta(3)\cdot z^3+\zeta(4)\cdot z^4-+\ldots=\gamma\cdot z+z\cdot\psi(1+z)$$

und nach der Anmerkung ***4.3.3.*** 3) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)\cdot z^k = \gamma\cdot z+z\cdot\left(\frac{1}{z}+\psi(z)\right),\ z\ne 0,\pm 1.$

(9*) $$\underline{\psi(z)=-\frac{1}{z}-\gamma+\zeta(2)\cdot z^1-\zeta(3)\cdot z^2+-\ldots=-\frac{1}{z}-\gamma+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\zeta(k)\cdot z^{k-1}.}$$

Es ist die Summe (8) + (9) = (5) ! Man vergleiche auch hier mit der Anmerkung ***4.3.3.*** 3).

Die Differenz (8) –(9) ergibt

(10) $$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k+1)\cdot z^{2k+1}=\zeta(3)\cdot z^3+\zeta(5)\cdot z^5+\ldots=-\frac{\psi(1-z)+\psi(1+z)}{2}\cdot z-\gamma\cdot z$$

Für $z:=1/2$ erhält man aus (8) , (9) und (10) die Reihen (8a), (9a), (8b) = (8a)+(9a), (10a)

(8a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\zeta(k)=\frac{1}{4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{16}\cdot\zeta(4)+\ \ldots=ln(2)$$

(9a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\zeta(k)=\frac{1}{4}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{16}\cdot\zeta(4)-+\ldots=1-ln(2)$$

(8b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}\zeta(2\cdot k)=\zeta(2)+\frac{1}{4}\cdot\zeta(4)+\frac{1}{4^2}\cdot\zeta(6)+\ \ldots=2$$

(10a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\zeta(2\cdot k+1)=\frac{1}{4}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{4^2}\cdot\zeta(5)+\frac{1}{4^3}\cdot\zeta(7)+\ \ldots=2\cdot ln(2)-1.$$

Mit $z=\frac{3}{4}$ und $z=\frac{1}{4}$ folgt aus (8) durch Subtraktion wegen $\psi(3/4)-\psi(1/4)=\pi\cdot cot(\pi/4)$

(8c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k-1}{4^k}\zeta(k+1)=\frac{3-1}{4}\cdot\zeta(2)+\frac{9-1}{16}\cdot\zeta(3)+\frac{27-1}{64}\cdot\zeta(4)+\ldots=\pi\ .$$

Aus der Differenz $H(z)-h(z)$ ergeben sich zu **4.4.1** analoge Reihen.

So folgen aus (5), (5a) bzw. (7) mit $h(z)=\frac{z^2}{1-z^2}=\sum_{k=1}^{\infty}z^{2\cdot k}$ bzw. $h(z)=\frac{z^2}{1-z^4}=\sum_{k=1}^{\infty}z^{4\cdot k-2}$

die Reihen

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2\cdot k)-1)\cdot z^{2\cdot k}=\frac{1-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)}{2}-\frac{z^2}{1-z^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2}$$ **(4.3.2.b)** !)

(12) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(4k-2)-1)\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{\pi\cdot z\cdot[coth(\pi z)-cot(\pi z)]}{4}-\frac{z^2}{1-z^4}$$

mit den Spezialfällen für $z:=1/2$

(11a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\cdot(\zeta(2\cdot k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{4^1}+\frac{\zeta(4)-1}{4^2}+\frac{\zeta(6)-1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{6}$$

(12a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k-1}}\cdot(\zeta(4k-2)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{4^1}+\frac{\zeta(6)-1}{4^3}+\frac{\zeta(10)-1}{4^5}+\ldots=\frac{\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{15}.$$

Aus (8) bzw. (9) erhält man mit $h(z)=\frac{z^2}{1-z}=\sum_{k=2}^{\infty}z^k$ bzw. $h(z)=\frac{z^2}{1+z}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k z^k$

(13) $$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)\cdot z^k=(\zeta(2)-1)\cdot z^2+(\zeta(3)-1)\cdot z^3+\ldots=-z\cdot\psi(1-z)-\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1-z}$$

(14) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\zeta(k)-1)\cdot z^k=(\zeta(2)-1)\cdot z^2-(\zeta(3)-1)\cdot z^3+-\ldots=z\cdot\psi(1+z)+\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1+z}$$

mit den Spezialfällen für $z:=1/2$

(13a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot(\zeta(k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{2}+\frac{\zeta(3)-1}{4}+\frac{\zeta(4)-1}{8}+\ldots=ln(2)-\frac{1}{2}$$

(14a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot(\zeta(k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{2}-\frac{\zeta(3)-1}{4}+\frac{\zeta(4)-1}{8}-+\ldots=\frac{5}{6}-ln(2).$$

Wie in **4.4.1**. nachgewiesen wurde konvergieren diese Reihen auch für z = 1 und man erhält die Summen aus den Formeln (11) bis (14) durch den Grenzübergang $z \to 1$.

Aus (11) folgt wegen $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$

(11b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2 \cdot k) - 1) = (\zeta(2) - 1) + (\zeta(4) - 1) + (\zeta(6) - 1) + \ldots = \frac{3}{4}.$

In (12) wird ebenfalls die Partialbruchentwicklung des Kotangens benutzt (vgl. **4.3.2. b)**).
Mit $\pi \cdot z \cdot cot(\pi \cdot z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot z^2}{n^2 - z^2}$ und $\frac{4 \cdot z^2}{1 - z^4} = \frac{2 \cdot z^2}{1 - z^2} + \frac{2 \cdot z^2}{1 + z^2}$ folgt aus Formel (12)

$$\frac{1}{4} \cdot \left[\pi \cdot z \cdot coth(\pi \cdot z) - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot z^2}{n^2 - z^2} - \frac{2 \cdot z^2}{1 + z^2} \right] \to \frac{1}{4} \left[\pi \cdot coth(\pi) - 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{1+1} \right]$$

(12b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(4k - 2) - 1) = (\zeta(2) - 1) + (\zeta(6) - 1) + (\zeta(10) - 1) + \ldots = \frac{\pi}{4} \cdot coth(\pi) - \frac{1}{8}.$

Verwendet man in der Summe (13) die Formel ***4.3.3.* 1)** , dann liefert der Grenzwert

$$-z \cdot \left(-\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n \cdot (n-z)} \right) - \gamma \cdot z - \frac{z^2}{1-z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z}{n \cdot (n-z)} \to \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

die Reihen (13b) und (13c) = (13b) – (11b)

(13b) $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = (\zeta(2) - 1) + (\zeta(3) - 1) + (\zeta(4) - 1) + \ldots = 1$ (Leibniz)

(13c) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2k+1) - 1) = (\zeta(3) - 1) + (\zeta(5) - 1) + (\zeta(7) - 1) + \ldots = \frac{1}{4}.$

Schließlich folgen aus (14) für z = 1 die Reihen (14b) und (14c) = (14b) – (4b)

(14b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (\zeta(k) - 1) = (\zeta(2) - 1) - (\zeta(3) - 1) + (\zeta(4) - 1) - + \ldots = \frac{1}{2}.$

(14c) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k-1}{k} (\zeta(k) - 1) = \frac{1}{2} (\zeta(2) - 1) - \frac{3}{4} (\zeta(3) - 1) + - \ldots = \frac{3}{2} - ln(2) - \gamma.$

Anmerkung:
Zur Berechnung einzelner Werte $F(z_0)$ ist der direkte Weg gelegentlich einfacher, als über die Aufstellung der Potenzreihe F(z). So erhält man (13b) *nach dem Doppelreihensatz wie folgt:*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 1.$$

5. Bildfunktionen der Area- und Arkustangensreihen

5.1. Die allgemeinen Transformationsregeln

Ausgehend von den Reihen

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{k-1}}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=z\pm\frac{1}{3}\cdot z^3+\frac{1}{5}\cdot z^5\pm\frac{1}{7}\cdot z^7+\ldots$$

werden die Bildfunktionen gesucht für die Bildreihen

$$F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)+\mu]\cdot z^{2\cdot k-1}=\zeta_*(\lambda+\mu)\cdot z\pm\frac{1}{3}\cdot\zeta_*(3\cdot\lambda+\mu)\cdot z^3+\pm\ldots$$

Sei $\quad f(x):=-ln(1-x)=ln\frac{1}{1-x}$,

dann ist wegen $ar\,tanh(z)=\frac{1}{2}\cdot ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot[-f(-x)+f(x)]$ nach den Regeln R(2), R(3)

$$\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{ar\,tanh\,(z)\}=\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{f(x)\}-\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{f(-x)\}\right]$$

und wegen $arctan(z)=\frac{1}{i}\cdot ar\,tanh(i\cdot z)$

$$\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{arctan\,(z)\}=\frac{1}{2\cdot i}\cdot\left[\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{f(i\cdot x)\}-\mathbf{Z}_{\lambda,\,\mu}\{f(-i\cdot x)\}\right].$$

5.2. Die Zuordnungen für $\mu = 0$

5.2.1. Die Transformationsregeln

Unter Verwendung der Transformationsregel der Logarithmusreihe **4.1.1.**

$$f(x)=-ln(1-z)\bullet\!\xrightarrow{\lambda,0}\sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot z^k-\,ln\,P_0(z,\lambda)$$

erhält man nach **5.1.**

$$\frac{1}{2}\cdot[ln(1+z)-ln(1-z)]\bullet\!\xrightarrow{\lambda,0}\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k)\cdot\left[z^k-(-z)^k\right]+\frac{1}{2}\cdot ln\frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)}$$

und schließlich die Transformationsregel des Areatangens (k wird durch $2k$-1 ersetzt)

$$ar\,tanh(z) \xrightarrow{\lambda,0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{\lambda+1}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} + \frac{1}{2}\cdot ln\frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} \quad , \quad |z|\le 1\ ,\ z\ne 1\ .$$

Analog (bzw. wegen $arctan(z) = \frac{1}{i}\,ar\,tanh(i\cdot z)$) folgt die Regel für den Arkustangens

$$arctan(z) \xrightarrow{\lambda,0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{\lambda+1}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{(-1)^{k-1}\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} + \frac{1}{2\cdot i}\cdot ln\frac{P_0(-i\cdot z,\lambda)}{P_0(i\cdot z,\lambda)}$$

$$|z|\le 1\ ,\ z\ne -i\ .$$

5.2.2. Eigenschaften der aus $P_0(z, \lambda > 1)$ gebildeten Quotienten

a) Unter Verwendung der in **4.1.2. a)** auftretenden Koeffizienten

$$a_k = a_k(\lambda) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k<\infty} \frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^{\lambda}} \quad , \quad \underline{\lambda > 1}$$

werden folgende Reihen definiert:

$$u_1(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cdot z^{2k-1} \quad , \quad v_1(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cdot z^{2k}$$

$$u_2(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\cdot a_{2k-1}\cdot z^{2k-1} \quad , \quad v_2(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{2k}\cdot z^{2k} \ .$$

Wie leicht zu überprüfen ist, gilt $i\cdot u_2(z,\lambda) = u_1(i\cdot z,\lambda)$ und $v_2(z,\lambda) = v_1(i\cdot z,\lambda)$.

b) Mit Hilfe der Reihen u_1 , v_1 ergeben sich nach **4.1.2. a)**

$$P_0(z,\lambda) = v_1(z,\lambda) - u_1(z,\lambda) \quad \text{und} \quad P_0(-z,\lambda) = v_1(z,\lambda) + u_1(z,\lambda)\ ,$$

$$ln\frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} = ln\frac{v_1+u_1}{v_1-u_1} = ln\frac{1+\frac{u_1}{v_1}}{1-\frac{u_1}{v_1}} = 2\cdot ar\,tanh\frac{u_1(z,\lambda)}{v_1(z,\lambda)}$$

und für $\underline{|z|\le 1\ ,\ z\ne 1}$ aus **5.2.1.** die Zuordnung

$$ar\,tanh(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{2k-1} \xrightarrow{\lambda>1,0} ar\,tanh\frac{u_1(z,\lambda)}{v_1(z,\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}\ .$$

c) Mit Hilfe der Reihen u_2 , v_2 erhält man nach **b)** und **a)**

$$P_0(i\cdot z,\lambda)=v_1(i\cdot z,\lambda)-u_1(i\cdot z,\lambda)=v_2(z,\lambda)-i\cdot u_2(z,\lambda)$$

$$P_0(-i\cdot z,\lambda)=v_1(i\cdot z,\lambda)+u_1(i\cdot z,\lambda)=v_2(z,\lambda)+i\cdot u_2(z,\lambda)$$

$$ln\frac{P_0(-i\cdot z,\lambda)}{P_0(i\cdot z,\lambda)}=ln\frac{1+i\cdot\frac{u_2}{v_2}}{1-i\cdot\frac{u_2}{v_2}}=2\cdot ar\,tanh\left(i\cdot\frac{u_2}{v_2}\right)=2\cdot i\cdot arctan\frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)}$$

und für $\underline{|z|\leq 1\text{ , } z\neq i}$ aus **5.2.1.** die Zuordnung

$$arctan(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-1}}{2k-1}\quad\bullet\!\xrightarrow{\lambda>1,0}$$

$$arctan\frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}\ .$$

d) Durch Umstellung der Formeln aus **b)** und **c)** ergeben sich folgende Beziehungen

$$2\cdot v_1(z,\lambda)=P_0(-z,\lambda)+P_0(z,\lambda)\qquad 2\cdot u_1(z,\lambda)=P_0(-z,\lambda)-P_0(z,\lambda)$$

$$2\cdot v_2(z,\lambda)=P_0(-i\cdot z,\lambda)+P_0(i\cdot z,\lambda)\qquad 2\cdot i\cdot u_2(z,\lambda)=P_0(-i\cdot z,\lambda)-P_0(i\cdot z,\lambda)$$

$$v_1(z,\lambda)^2-u_1(z,\lambda)^2=P_0(-z,\lambda)\cdot P_0(z,\lambda)=P_0\left(z^2,2\cdot\lambda\right)$$

$$v_2(z,\lambda)^2+u_2(z,\lambda)^2=P_0(-i\cdot z,\lambda)\cdot P_0(i\cdot z,\lambda)=P_0\left((i\cdot z)^2,2\cdot\lambda\right)=P_0\left(-z^2,2\cdot\lambda\right).$$

Anmerkung:

Aus der Anmerkung **4.1.2.** 3) folgt für $\lambda\geq 2$

$$a_k(\lambda)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k<\infty}\frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^{\lambda-2}}\cdot\frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^2}$$

$$\leq\frac{1}{(k!)^{\lambda-2}}\cdot a_k(2)=\frac{1}{(k!)^{\lambda-2}}\cdot\frac{\pi^{2\cdot k}}{(2k+1)!}\ .\qquad \underline{\lim_{\lambda\to\infty}a_k(\lambda)=0}\ .$$

Aus der beständigen Konvergenz der Reihe $1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\lambda)\cdot z^k$ für $\lambda=2$ folgt die beständige Konvergenz der Reihe für $\lambda>2$.

Die Reihen u_1, v_1, u_2, v_2 und $P_0(z,\lambda)$ sind dann ebenfalls beständig konvergent!

5.2.3. Anwendung auf den Spezialfall $\lambda = 2$

Aus der bekannten Darstellung **4.1.2.** 1) $P_0\left(z^2,2\right) = \dfrac{\sin(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$

und den Folgerungen

$$P_0\left(-z^2,2\right) = P_0\left((i \cdot z)^2,2\right) = \frac{\sin(\pi \cdot i \cdot z)}{\pi \cdot i \cdot z} = \frac{\sinh(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$$

$$P_0\left(i \cdot z^2,2\right) = P_0\left((\varepsilon \cdot z)^2,2\right) = \frac{\sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{\pi \cdot \varepsilon \cdot z} \quad , \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i) \ , \varepsilon^2 = i$$

$$P_0\left(-i \cdot z^2,2\right) = P_0\left((i \cdot \varepsilon \cdot z)^2,2\right) = \frac{\sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{\pi \cdot \varepsilon \cdot z},$$

ergeben sich die Spezialfälle der Beziehungen aus **5.2.2. d)**

$$v_1\left(z^2,2\right) = \frac{\sinh(\pi \cdot z) + \sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z} \qquad u_1\left(z^2,2\right) = \frac{\sinh(\pi \cdot z) - \sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z}$$

$$v_2\left(z^2,2\right) = \frac{\sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) + \sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot z} \qquad u_2\left(z^2,2\right) = \frac{\sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) - \sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \varepsilon \cdot z}.$$

Wendet man die Additionstheoreme auf das komplexe Argument an und benutzt die Beziehungen zwischen den Hyperbel- und Kreisfunktionen, so kann ε eliminiert werden:

$$S := \sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z \cdot (1+i)\right) = \sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + i \cdot \cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)$$

$$T := \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z \cdot (1+i)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)$$

$$S \pm T = (1 \pm i) \cdot \left[\sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \pm \cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)\right].$$

Damit ergeben sich die Formeln

$$v_2\left(z^2,2\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot z} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)\right]$$

$$u_2\left(z^2,2\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot z} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)\right].$$

5.2.4. Zugehörige Bildreihen für $\lambda \geq 1$

a) Sei $\underline{\lambda = 2}$.

Aus **5.2.1.** und **5.2.2. b)** folgt für $f(z) = ar\,tanh(z)$ die Bildfunktion

$$F_{2,0}\left(z^2\right) = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{P_0\left(-z^2,2\right)}{P_0\left(z^2,2\right)} = ar\,tanh \frac{u_1\left(z^2,2\right)}{v_1\left(z^2,2\right)}$$

und mit **5.2.3.**

(15)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(4k-2)}{2k-1} \cdot z^{4\cdot k-2} = \frac{\zeta(2)}{1} \cdot z^2 + \frac{\zeta(6)}{3} \cdot z^6 + \frac{\zeta(10)}{5} \cdot z^{10} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{sinh(\pi \cdot z)}{sin(\pi \cdot z)}$$

$$= ar\,tanh \frac{sinh(\pi \cdot z) - sin(\pi \cdot z)}{sinh(\pi \cdot z) + sin(\pi \cdot z)} \qquad |z| \leq 1 \,,\; z^2 \neq 1$$

Für $z := 1/2$ gilt speziell

(15a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(4k-2)}{(2k-1) \cdot 4^{2k-1}} = \frac{1}{1 \cdot 4} \cdot \zeta(2) + \frac{1}{3 \cdot 4^3} \cdot \zeta(6) + \frac{1}{5 \cdot 4^5} \cdot \zeta(10) + \ldots = \frac{1}{2} \cdot ln\, sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

und durch Subtraktion von $ar\,tanh\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{5}{3}\right)$

(15b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1) \cdot 4^{2k-1}} = \frac{1}{1 \cdot 4} \cdot (\zeta(2)-1) + \frac{1}{3 \cdot 4^3} \cdot (\zeta(6)-1) + \ldots = \frac{1}{2} \cdot ln\left[\frac{3}{5} \cdot sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Aus **5.2.1.** und **5.2.2. c)** folgt für $f(z) = arctan(z)$ die Bildfunktion

$$F_{2,0}\left(z^2\right) = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot ln \frac{P_0\left(-i \cdot z^2,2\right)}{P_0\left(i \cdot z^2,2\right)} = arctan \frac{u_2\left(z^2,2\right)}{v_2\left(z^2,2\right)}$$

und mit **5.2.3.**

(16)
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{\zeta(4k-2)}{2k-1} \cdot z^{4\cdot k-2} = \frac{\zeta(2)}{1} \cdot z^2 - \frac{\zeta(6)}{3} \cdot z^6 + \frac{\zeta(10)}{5} \cdot z^{10} - + \ldots =$$

$$= arctan \frac{sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) - cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)}{sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)} \qquad |z| \leq 1 \,,\; z^2 \neq -i$$

Für $z := \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$ gilt wegen $cosh\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm sinh\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pm\frac{\pi}{4}}$

(16a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 8^{2k-1}} = \frac{1}{1\cdot 8}\cdot\zeta(2) - \frac{1}{3\cdot 8^3}\cdot\zeta(6) + \frac{1}{5\cdot 8^5}\cdot\zeta(10) - + \ldots = arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Für $z := \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt speziell $F_{2,0}\left(z^2\right) = arctan(1)$, d. h.

(16b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}} = \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\zeta(2) - \frac{1}{3\cdot 2^3}\cdot\zeta(6) + \frac{1}{5\cdot 2^5}\cdot\zeta(10) - + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Anmerkung:

Die Reihe (16b) *kann auch aus folgender Eigenschaft des Arkustangens gewonnen werden*:

Es gilt wegen $$arctan\frac{1}{2\cdot n^2} = arctan\frac{n}{n+1} - arctan\frac{n-1}{n}$$

die Summenformel $$\underline{\sum_{n=1}^{m} arctan\frac{1}{2\cdot n^2} = arctan\frac{m}{m+1}} \to arctan(1) \text{ für } m \to \infty.$$

Folglich $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{2k-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot n^2}\right)^{2k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{2\cdot n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Sei $\underline{\lambda = 1}$.

Aus **5.2.1.** und **4.1.2. b)** folgt für $f(z) = ar\,tanh(z)$ und $|z| \le 1$, $z \ne 1$,

$$F_{1,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = \zeta_*(1)\cdot z + \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{e^{-\gamma\cdot z}}{\Gamma(1+z)}\cdot\frac{\Gamma(1-z)}{e^{\gamma\cdot z}}\right) = \frac{1}{2}\cdot ln\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1+z)}$$

und die Bildreihe

(17) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = \frac{\zeta(3)}{3}\cdot z^3 + \frac{\zeta(5)}{5}\cdot z^5 + \frac{\zeta(7)}{7}\cdot z^7 + \ldots = -\gamma\cdot z + \frac{1}{2}\cdot ln\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1+z)}.$$

Diese Reihe erhält man auch durch Subtraktion der Reihen **(1)** mit den Argumenten z und $-z$!

Mit $z := i \cdot z$ folgt zu $f(z) = arctan(z) = \frac{1}{i} \cdot ar\,tanh(i \cdot z)$, $|z| \le 1$, $z \ne -i$, aus obigem Ergebnis die Darstellung

$$F_{1,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1} = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot ln \frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)} .$$

Die zugehörige Bildreihe lautet

(18) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1} = \frac{\zeta(3)}{3} \cdot z^3 - \frac{\zeta(5)}{5} \cdot z^5 + - = \gamma \cdot z - \frac{1}{2 \cdot i} \cdot ln \frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}} .$$

Anmerkungen:

Setzt man $\underline{z := x + i\,y}$ (*x*,*y* reell), so gilt

1) $$\underline{arg\,\Gamma(1+i\,z) = \psi(1-y) \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n-y} - arctan \frac{x}{n-y} \right]}$$

Beweis:
Setze in $1 + i\,z = 1 - y + i\,x$ abkürzend $u := -y + i\,x$.

Es gelten folgende Relationen (siehe unten $*$, $**$)

(1) $$arg\,\Gamma(1+u) + \sum_{n=1}^{N-1} arg(n+u) = arg\,\Gamma(N+u) \ ,$$

(2) $$arg\,\Gamma(N+u) - x \cdot ln(N) \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty \ .$$

Mit $arg(n+u) = arctan \frac{x}{n-y}$ folgt aus (1) und (2)

$$arg\,\Gamma(1-y+i\,x) + \sum_{n=1}^{N-1} arctan \frac{x}{n-y} - x \cdot ln(N) = arg\,\Gamma(N-y+i\,x) - x \cdot ln(N) \to 0$$

Durch Erweiterungen entsteht der Ausdruck

$$arg\,\Gamma(1-y+i\,x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{x}{n-y} - arctan \frac{x}{n-y} \right] - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{x}{n-y} - \frac{x}{n} \right]$$
$$- \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=1}^{N-1} \frac{x}{n} - x \cdot ln(N) \right] .$$

Nach ***4.3.3.*** 1) und **1.** folgt daraus

$$arg\,\Gamma(1+i\,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n-y} - arctan \frac{x}{n-y} \right] + [\psi(1-y) + \gamma] \cdot x - \gamma \cdot x$$

* Aus $arg\,\Gamma(1+u)+arg(1+u)=arg[(1+u)\cdot\Gamma(1+u)]=arg\,\Gamma(2+u)$ folgt durch Induktion (1).

** Aus der Definition der Gammafunktion nach Gauß

$$\Gamma(u):=\lim_{N\to\infty}\frac{N^u\cdot(N-1)!}{u\cdot(u+1)\cdot\ldots\cdot(u+N-1)} \quad \text{und} \quad \Gamma(u)\cdot u\cdot(u+1)\cdot\ldots\cdot(u+N-1)=\Gamma(N+u)$$

folgt $$\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(N)\cdot N^u}{\Gamma(N+u)}=1 \quad \text{mit} \quad N^u=e^{u\cdot ln(N)}=e^{(-y+i\,x)\cdot ln(N)} \; .$$

Also gilt für die Argumente des Genzwertes die Relation (2):

$$arg\,\Gamma(N)+arg\left(N^u\right)-arg\,\Gamma(N+u)=0+x\cdot ln(N)-arg\,\Gamma(N+u)\to arg(1)=0\,.$$

2) Für die Real- und Imaginärteile von **(18)** gilt

$$\underline{Re=\gamma\cdot x+\frac{1}{2}\cdot(arg\,\Gamma(1+i\,z)-arg\,\Gamma(1-i\,z))} \; , \quad Im=\gamma\cdot y+\frac{1}{2}\cdot ln\frac{|\Gamma(1-i\,z)|}{|\Gamma(1+i\,z)|}$$

denn aus $\dfrac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}=R\cdot e^{i\phi}$ *folgt* $-\dfrac{1}{2\cdot i}ln\left(R\cdot e^{i\phi}\right)=\dfrac{i}{2}\cdot ln(R)-\dfrac{1}{2}\cdot\phi$.

3) Für <u>reelles</u> $z=x$ folgt aus **(18)** und 2), falls $\underline{-1\le x\le 1}$,

$$\textbf{(18*)}\quad \underline{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot x^{2\cdot k-1}=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot x^3-\frac{\zeta(5)}{5}\cdot x^5\;+-=\gamma\cdot x+arg\,\Gamma(1+i\,x)} \; ,$$

denn wegen $\Gamma(1-i\,x)=\overline{\Gamma(1+i\,x)}$ *ist* $|\Gamma(1-i\,x)|=|\Gamma(1+i\,x)|$, $arg\,\Gamma(1-i\,x)=-arg\,\Gamma(1+i\,x)$.

Für das Argument gelten die weiteren Eigenschaften:

4) $$arg\,\Gamma(1+i\,x)=-\gamma\cdot x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-arctan\frac{x}{n}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[x\cdot ln(N)-\sum_{n=1}^{N}arctan\frac{x}{n}\right]$$

Man beachte $\psi(1)=-\gamma$ *und die Definition von* γ *aus* **1**.

5) $$arg\,\Gamma(1+i\,x)=arg(i\,x\cdot\Gamma(i\,x))=arg(i\,x)+arg\,\Gamma(i\,x)=\frac{\pi}{2}+arg\,\Gamma(i\,x)\text{, falls } x>0\,.$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{arg\,\Gamma(1+i\,x)}{x}=-\gamma\,.$ *Dies folgt aus* **(18*).**

5.3. Die Bildfunktionen des Arkustangens als Grenzwerte

5.3.1. Die Transformationsformeln (für $\mu = 0$)

In den vorherigen Abschnitten wurde die Transformation des Arcustangens auf die des Logarithmus zurückgeführt und nur gelegentlich der Grenzwertansatz **3.1.** benutzt.
In diesem Abschnitt wird dieser Ansatz näher ausgeführt.

Nach **3.1.** R(9) erhält man für

$$g(z) = arctan(z) - \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot z^{2\cdot k-1} \ , \quad k_0 = min\big(k \,\big|\, (2k-1)\cdot\lambda > 1\big) = \left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right] + 1$$

die Bildfunktion als Grenzwert

$$\underline{A_0(z,\lambda) := G_{\lambda,0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[arctan\frac{z}{n^\lambda} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \left(\frac{z}{n^\lambda}\right)^{2k-1} \right]} , \ |z| \le 1 \ , \ z \ne -i \, .$$

Damit lautet die Transformationsformel für die Arkustangensreihe

$$arctan(z) \ \bullet\!\!\xrightarrow{\lambda,0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{(-1)^{k-1}\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1} \cdot z^{2\cdot k-1} + A_0(z,\lambda) \ , \quad |z| \le 1 \ , \ z \ne -i \, .$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)] \cdot z^{2\cdot k-1}$$

Die Bildreihen haben die Form

$$\underline{\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \zeta[\lambda\cdot(2k-1)] \cdot z^{2\cdot k-1} = A_0(z,\lambda)} \ , \quad k_0 = \left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right] + 1$$

5.3.2. Eigenschaften der Grenzwerte $A_0(z, \lambda)$

a) Sei $\underline{\lambda > 0}$.

1) $A_0(-z,\lambda) = -A_0(z,\lambda)$

2) $\underline{A_0(z,\lambda) = \frac{1}{2i} \cdot ln\frac{P_0(-iz,\lambda)}{P_0(iz,\lambda)}}$, $P_0(iz,\lambda)\cdot e^{2i\cdot A_0(z,\lambda)} = P_0(-iz,\lambda)$ **(5.2.1.)**

3) $A_0(x,\lambda) = arg\, P_0(-i\,x,\lambda) = arg(ln\, P_0(-i\,x,\lambda))$ für reelles x **.**

Dies folgt aus 2), *denn* $P_0(i\,x,\lambda) = \overline{P_0(-i\,x,\lambda)}$, *sowie* $ln\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) = ln\, r + i\varphi$.

b) Sei $\underline{\lambda > 1}$. Dann ist $\left[\frac{1+1/\lambda}{2}\right] = 0$ und die Summe leer.

1) $\underline{A_0(z,\lambda>1) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{z}{n^{\lambda}}} \;=\; arctan\frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)}$ **(5.2.2.c))**

2) $A_0\left(z^2,2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{z^2}{n^2} = arctan\frac{u_2\left(z^2,2\right)}{v_2\left(z^2,2\right)}$ **(16)! (5.2.4.)**

3) $A_0\left(\frac{1}{2},2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{2\cdot n^2} = \frac{\pi}{4}$ **(16b),** Anmerkung

c) Sei $\underline{\lambda = 1}$. Dann ist $\left[\frac{1+1}{2}\right] = 1$.

1) $\underline{A_0(z,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\frac{z}{n} - \frac{z}{n}\right)} \;=\; -\gamma\cdot z + \frac{1}{2i}\cdot ln\frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}$ **(18) (5.2.4.)**

2) $A_0(x,1) = -\gamma\cdot x - arg\,\Gamma(1+i\,x) = -\gamma\cdot x + arg\,\Gamma(1-i\,x)$ **(18*) (5.2.4.** 4))

3) Setze $\underline{\eta_1 := -A_0(1,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - arctan\frac{1}{n}\right) = \gamma - arg\,\Gamma(1-i) \approx 0.275575...}$

(18a)

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot = \frac{\zeta(3)}{3} - \frac{\zeta(5)}{5} + \frac{\zeta(7)}{7} - \frac{\zeta(9)}{9} + -... = \eta_1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1}\cdot = \frac{\zeta_*(1)}{1} - \frac{\zeta_*(3)}{3} + \frac{\zeta_*(5)}{5} - +... = \gamma - \eta_1 = arg\,\Gamma(1-i)$$

4) Setze $B_0(z,1) := A_0(z,1) + z\cdot\eta_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\frac{z}{n} - z\cdot arctan\frac{1}{n}\right)$

Aus 1)...3) *folgt für reelle x*

$$B_0(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\frac{x}{n} - x\cdot arctan\frac{1}{n}\right) = arg\,\Gamma(1-i\,x) - x\cdot\Gamma(1-i)\,.$$

Anmerkung zu **c)** 4):

Durch zweimaliges Anwenden des Additionstheorems des Arcustangens entsteht die Identität $2\cdot arctan\dfrac{1}{2\cdot a}-arctan\dfrac{1}{a}=arctan\dfrac{1}{a\cdot\left(4\cdot a^2+3\right)}$. *Daraus folgt*

$$B_0\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot arctan\frac{1}{2\cdot n}-arctan\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{n\cdot\left(4\cdot n^2+3\right)}=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[arctan\frac{1}{7}+arctan\frac{1}{38}+arctan\frac{1}{117}+...\right]=arg\,\Gamma\left(1-\frac{i}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot arg\,\Gamma(1-i).$$

Aus $2\cdot A_0\left(\frac{1}{2},1\right)+\eta_1=2\cdot B_0\left(\frac{1}{2},1\right)$ *folgt nach* **c)**1) , **5.3.1.** *und* **(18a)**

(18b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\cdot\zeta(2k-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\zeta(3)-\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{16}\cdot\zeta(5)+\frac{1}{7}\cdot\frac{63}{64}\cdot\zeta(7)-...=$$
$$=arg\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{i}{2}\right)}{\Gamma(1-i)}=\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{n\cdot\left(4\cdot n^2+3\right)}\approx 0{,}186476...$$

d) Sei $\underline{\lambda=1/2}$. $\left[\dfrac{1+2}{2}\right]=1$

1) Aus **5.3.1.** folgt

(19) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right]\cdot z^{2\cdot k-1}=\frac{1}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot z^3-\frac{1}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot z^5+-...=-A_0\left(z,\frac{1}{2}\right)}$$

2) $$\underline{A_0\left(z,\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctan\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)-\frac{z}{\sqrt{n}}\right]}$$

Auch aus **a)** 2) *und* $P_0\left(z,\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\sqrt{n}}\right)\cdot e^{\frac{z}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{n}}$ (**4.1.2.c**) *folgt* **d)** 2) .

3) $$A_0\left(x,\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\frac{x}{\sqrt{n}}\right]=arg\,P_0\left(-i\,x,\frac{1}{2}\right)$$ (S*iehe* **a)** 3) .)

4) Setze $$\underline{\eta_2:=-A_0\left(1,\frac{1}{2}\right)=-arg\,P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\approx 0.697428...}$$

(19a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right]=\frac{1}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{7}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)-+\ldots=\eta_2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\zeta_*\left[\frac{2k-1}{2}\right]=\zeta_*\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\zeta_*\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{5}\cdot\zeta_*\left(\frac{5}{2}\right)-+\ldots=\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-\eta_2$$

5) Setze $B_0\left(z,\frac{1}{2}\right):=A_0\left(z,\frac{1}{2}\right)+z\cdot\eta_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\frac{z}{\sqrt{n}}-z\cdot arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Anmerkung zu **d)** 5): *Analog zur Anmerkung* **c)** 4) *gilt*

$$B_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot arctan\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}-arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(4\cdot n+3)}\ .$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[arctan\frac{1}{7}+arctan\frac{1}{11\cdot\sqrt{2}}+arctan\frac{1}{15\cdot\sqrt{3}}+\ldots\right]=A_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\eta_2\ .$$

Hieraus folgt nach **(19)**, **(19a)** *und* **d)** 3)

(19b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\cdot\zeta\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{16}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{7}\cdot\frac{63}{64}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)-\ldots=$$

$$=arg\,P_0\left(-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)+\eta_2=\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(4\cdot n+3)}\approx 0{,}494\ldots\ .$$

6) $\underline{P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{\gamma}{2}-\eta_2\cdot i}}$ **.**

Wegen **d)** 4) *genügt der Nachweis für den Betrag. Nach* **4.1.2. d)** *und* **4.1.2. b)** *gilt* $\left|P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right)\right|^2=P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right)\cdot P_0\left(i,\frac{1}{2}\right)=P_0(-1,1)=\frac{e^{-\gamma}}{\Gamma(2)}=e^{-\gamma}$

Anmerkung. Ohne Rückgriff auf **4.1.2. b**) *ist der Beweis etwas aufwändiger:*

$$\left|P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right)\right|=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N-1}\left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right|\cdot\left|e^{\frac{-i}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}\right|=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}}=\lim_{N\to\infty}e^{\frac{1}{2}\left(ln(N)-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)}=e^{-\frac{\gamma}{2}}\ .$$

5.3.3. Eine geometrische Deutung des Grenzwertes η_2

Die Punktfolge $z_1 = 1,\ z_m = \prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\ (m>1)$ bildet einen Streckenzug in der komplexen Ebene, der sich in seinem Verlauf einer Archimedischen Spirale annähert.

Siehe **Pólya/Szegö** *Band* 1, III. *Abschnitt, Aufgabe* 42.

Genauer:

Die Spirale $\underline{r(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot(\varphi + r_0)}$ mit $\underline{r_0 = \eta_2 - \zeta\left(\frac{1}{2}\right)}$ approximiert den Streckenzug z_m.

Der Winkel $\varphi \geq 0$ *wächst im mathematisch positiven Drehsinn unbegrenzt.*

1. Begründung.

In der Polarform $z_m = r_m \cdot exp(i\cdot\varphi_m)$ gilt $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$ und für $m > 1$

$$r_m = |z_m| = \prod_{n=1}^{m-1}\left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right| = \prod_{n=1}^{m-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{m} \quad , \quad \varphi_m = \sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{1}{\sqrt{n}} = \varphi_{m-1} + arctan\frac{1}{\sqrt{m-1}}\ .$$

Daraus folgt

Die Abweichung $\Delta_m = r(\varphi_m) - r_m$ konvergiert mit wachsendem m gegen Null:

$$\lim_{m\to\infty}\Delta_m = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{m-1} arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \eta_2 - \zeta\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sqrt{m}\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\cdot\sqrt{m-1}\right) - 2\cdot\sqrt{m}\right].$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\sqrt{m-1} - \sqrt{m}\right] = 0\,.$$

2. Für r_0 gilt die Reihe **(19a)**

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right] = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{7}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right) - \ldots$$

und der Grenzwert

$$r_0 = \lim_{N\to\infty}\left(2\cdot\sqrt{N} - \sum_{n=1}^{N} arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2{,}15778\ldots$$

3. $r(\varphi+2\pi)-r(\varphi)=\pi$, $r(2\cdot k\cdot\pi)=k\cdot\pi+\dfrac{r_0}{2}$. Der „Windungsabstand" ist gleich π.

4. $\varphi_m \approx 2\cdot\sqrt{m}-r_0$. Die Abweichung geht mit wachsendem m gegen 0.

$$2\cdot\sqrt{m}-r_0-\varphi_m=\left(2\cdot\sqrt{m}-\sum_{n=1}^{m}arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-r_0+arctan\frac{1}{\sqrt{m}}\to 0 .$$

5. $\varphi_{(m+1)^2}-\varphi_{m^2}\approx 2\cdot(m+1)-2\cdot m=2$, $r_{(m+1)^2}-r_{m^2}=(m+1)-m=1$.

Der Winkelabstand beachbarter Punkte mit quadratischem Index ist annähernd gleich 2. Auf jeder Windung liegen drei dieser Punkte. Sie ordnen sich auf drei „Spiralarmen" an, die je Windung um den Winkel $\delta=2\cdot\pi-6$ zurückbleiben.

6. Die Kurvenlänge L wächst annähernd quadratisch mit der Windungszahl k .

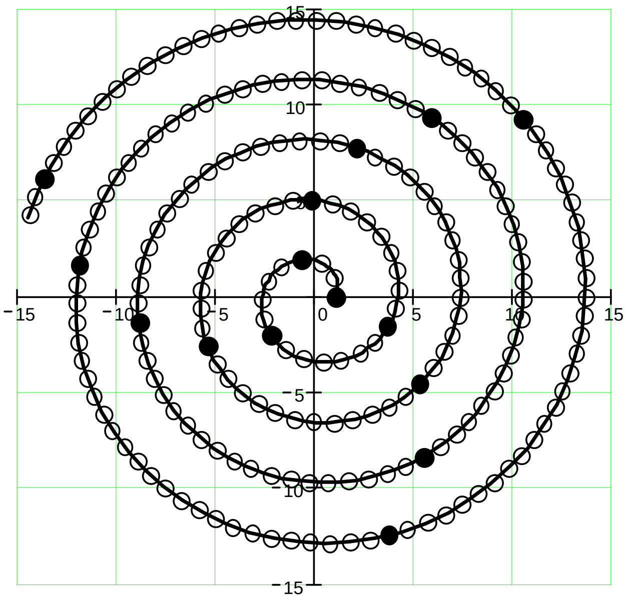
$$L(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{r(t)^2+r'(t)^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\varphi}\sqrt{(t+r_0)^2+1}\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[2\cdot r\cdot\sqrt{4\cdot r^2+1}+ln\left(2\cdot r+\sqrt{4\cdot r^2+1}\right)\right]_{r=r_0/2}^{r=r(\varphi)}\approx r(\varphi)^2-\frac{r_0^2}{4}+\frac{1}{4}\cdot ln\frac{2\cdot r(\varphi)}{r_0}$$
$$L(2\cdot k\cdot\pi)\approx(k\cdot\pi)^2+r_0\cdot k\cdot\pi+\frac{1}{4}\cdot ln\frac{2\cdot k\cdot\pi+r_0}{r_0}$$

7. Die Windungslänge L_k wächst nahezu linear mit der Windungszahl k.

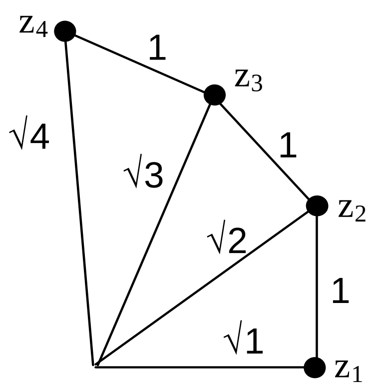
$$L_k=L(k\cdot 2\pi)-L((k-1)\cdot 2\pi)\approx 2\cdot\pi^2\cdot k-(\pi-r_0)\cdot\pi \quad\approx\ \text{Anzahl der Punkte } z_m\ !$$

8. Grafische Darstellung

o Punkte z_m , • Punkte z_{m^2} , —— Spirale $r(\varphi)$



Der Streckenzug läßt sich iterativ konstruieren:
Man trägt jeweils im Punkt z_{m-1} senkrecht auf r_{m-1} die Strecke 1 ab und erhält z_m .



6. Bildfunktionen der binomischen Reihe

6.1. Die allgemeine Transformationsformel $\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}\left\{(1+z)^{\alpha}\right\}$

Gegeben ist die binomische Reihe $f(z)=(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot z^{k}$ mit reellem $\alpha\neq 0$.

Diese Reihe ist für positives ganzzahliges $\alpha=m$ und beliebigen z eine endliche Summe.
Für $\alpha\neq m$ ist die Reihe absolut konvergent für $|z|<1$ und falls $\alpha>0$ auch für $|z|=1$.

Man beachte, dass stets der Hauptwert der Potenz $f(z)=e^{\alpha\cdot ln(1+z)}$ *gemeint ist.*

Mit beliebigen reellen $\lambda>0$,μ sind

$$g(z)=(1+z)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot z^{k}\quad,\qquad k_0=min\left\{k\ \middle|\ \lambda\cdot k+\mu>1\ ,k\geq 0\right\}$$

$$\underline{G_{\lambda\ ,\mu}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\mu}}g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n^{\mu}}\left(1+\frac{z}{n^{\lambda}}\right)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot\frac{z^{k}}{n^{\lambda\cdot k+\mu}}\right]}.$$

Die gesuchte Bildfunktion hat die Form

$$F_{\lambda\ ,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta_{*}(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^{k}+G_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta_{*}(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^{k}\quad.$$

6.2. Die Bildfunktion $\mathbf{Z}_{1,-\alpha}\left\{(1+z)^{\alpha}\right\}$

6.2.1. Der Fall $0<\alpha<1$.

Mit $\lambda=1$ und $\mu=-\alpha<0$ gilt $k_0=[1+\alpha]+1=2$.

Es folgt der Ansatz $g(z)=(1+z)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{1}\binom{\alpha}{k}\cdot z^{k}=(1+z)^{\alpha}-(1+\alpha\cdot z)$

$$G(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[n^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{1}\binom{\alpha}{k}\cdot\frac{z^{k}}{n^{k-\alpha}}\right]=\underline{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[(n+z)^{\alpha}-n^{\alpha}-\alpha\cdot\frac{z}{n^{1-\alpha}}\right]}.$$

und die Bildfunktion

$$F_{1,-\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{1}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta_{*}(k-\alpha)\cdot z^{k}+G_{1,-\alpha}(z)=0+\alpha\cdot\zeta(1-\alpha)\cdot z+G(z).$$

Die Transformationsregel für alle $|z| \le 1$ und $0 < \alpha < 1$ lautet

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot z^k \quad \bullet\!\xrightarrow{1,-\alpha} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \zeta(k-\alpha) \cdot z^k =$$

$$= \alpha \cdot \zeta(1-\alpha) \cdot z + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[(n+z)^{\alpha} - n^{\alpha} - \alpha \cdot \frac{z}{n^{1-\alpha}} \right].$$

Die Bildfunktion erfüllt folgende Beziehung

(20*) $$\underline{F_{1,-\alpha}(1-z) - F_{1,-\alpha}(-z) = -(1-z)^{\alpha}} \quad .$$

Beweis:

$$G(1-z) - G(-z) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[(n+1-z)^{\alpha} - (n-z)^{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right] = \lim_{N\to\infty} \left[(N+1-z)^{\alpha} - (1-z)^{\alpha} - \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[(N+1-z)^{\alpha} - N^{\alpha} + \alpha \cdot \left(\frac{N^{\alpha}}{\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) \right] - (1-z)^{\alpha} = 0 - \alpha \cdot \zeta(1-\alpha) - (1-z)^{\alpha}$$

$$F_{1,-\alpha}(1-z) - F_{1,-\alpha}(-z) = \alpha \cdot \zeta(1-\alpha) \cdot (1-z+z) + G(1-z) - G(-z) = -(1-z)^{\alpha}$$

Die Beziehung **(20*)** läßt sich als Bildreihe darstellen:

(20) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \zeta(k-\alpha) \cdot \left[(1-z)^k - (-z)^k \right] = -(1-z)^{\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad , \quad |z| \le 1, \; |1-z| \le 1 \; .$$

Für $\underline{z = 0,\ 1,\ 1/2}$ ergeben sich aus **(20)** die speziellen Reihen

(20a) $$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \zeta(k-\alpha) = 1 + \binom{\alpha}{1} \cdot \zeta(1-\alpha) + \binom{\alpha}{2} \cdot \zeta(2-\alpha) + \binom{\alpha}{3} \cdot \zeta(3-\alpha) + \ldots = 0$$

(20b) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \binom{\alpha}{k} \cdot \zeta(k-\alpha) = \binom{\alpha}{1} \cdot \zeta(1-\alpha) - \binom{\alpha}{2} \cdot \zeta(2-\alpha) + \binom{\alpha}{3} \cdot \zeta(3-\alpha) - + \ldots = 0$$

(20c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{2k-1} \cdot \frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^{2k-1}} = \binom{\alpha}{1} \cdot \frac{\zeta(1-\alpha)}{2^1} + \binom{\alpha}{3} \cdot \frac{\zeta(3-\alpha)}{2^3} + \ldots = -\frac{1}{2^{\alpha+1}}$$

Die Reihe **(20b)** *konvergiert sehr langsam für* $\alpha \approx 0$! **(20c)** *konvergiert schnell*.

Für $\alpha = 1/2$ erhält man mit $\binom{1/2}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(1/2 - j + 1)}{j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{3-2j}{2j}$ aus den Reihen **(20a-c)**

(20d) $$1 + \frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right) + - \ldots = 0$$

(20e) $$\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right) + \ldots = 0$$

(20g) $$\frac{1}{1!\cdot 4^1}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 4^3}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\cdot 4^5}\cdot\zeta\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{7!\cdot 4^7}\cdot\zeta\left(\frac{13}{2}\right) + \ldots = \frac{-1}{\sqrt{8}}\,.$$

Subtrahiert man von **(20)** die Originalreihe

$$f(1-z) - f(-z) = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\left[(1-z)^k - (-z)^k\right] = (2-z)^\alpha - (1-z)^\alpha,$$

so entstehen weitere Reihen:

(21) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1]\cdot\left[(1-z)^k - (-z)^k\right] = -(2-z)^\alpha} \qquad 0<\alpha<1\,,\ |z|\le 1,\ |1-z|\le 1$$

Für $\underline{z = 0\,,\ 1,\ 1/2}$ ergeben sich aus **(21)** die speziellen Reihen

(21a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1] = 1 + \binom{\alpha}{1}\cdot[\zeta(1-\alpha)-1] + \binom{\alpha}{2}\cdot[\zeta(2-\alpha)-1] + \ldots = -2^\alpha$$

(21b) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1] = \binom{\alpha}{1}\cdot[\zeta(1-\alpha)-1] - \binom{\alpha}{2}\cdot[\zeta(2-\alpha)-1] + - \ldots = 1$$

(21c)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{[\zeta(2k-1-\alpha)-1]}{2^{2k-1}} = \binom{\alpha}{1}\cdot\frac{[\zeta(1-\alpha)-1]}{2^1} + \binom{\alpha}{3}\cdot\frac{[\zeta(3-\alpha)-1]}{2^3} + \ldots = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha$$

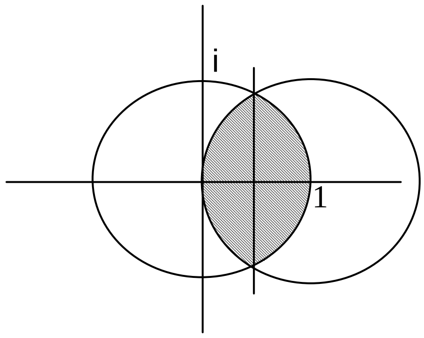
(21d) = **(21c)** für $z = 1/2$

$$\frac{1}{1!\cdot 4^1}\cdot\left[\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-1\right] + \frac{1\cdot 3}{3!\cdot 4^3}\cdot\left[\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-1\right] + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\cdot 4^5}\cdot\left[\zeta\left(\frac{9}{2}\right)-1\right] + \ldots = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,.$$

6.2.2. Bildreihen mit komplexem Argument (für $0 < \alpha < 1$).

Die zulässigen komplexen Werte z der Beziehung **(20)** liegen in der Schnittmenge der Kreisflächen

$$|z| \le 1 \text{ und } |1-z| \le 1 \;.$$



Dazu gehören die Punkte auf der Mittellinie

$$z = \frac{1}{2}(1 - y \cdot i) = r \cdot e^{-\varphi \cdot i} \;\text{ mit }\; 1 - z = \bar{z} = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

und $|y| \le \sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+y^2}$, $\varphi = arctan(y)$.

Für diese Punkte erhält die Formel **(20)** die folgende Form

(20#)

$$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot \zeta(k-\alpha) \cdot r^k \cdot \left[e^{\varphi \cdot k \cdot i} - (-1)^k e^{-\varphi \cdot k \cdot i}\right] = -r^{\alpha} \cdot e^{\varphi \cdot \alpha \cdot i} = -r^{\alpha} \cdot [cos(\varphi \cdot \alpha) + i \cdot sin(\varphi \cdot \alpha)]}$$

Zerlegt man diese Summe in Teilsummen mit geradem und ungeradem Laufindex und verwendet die Beziehungen

$$\left[e^{\varphi \cdot 2k \cdot i} - (-1)^{2k} e^{-\varphi \cdot 2k \cdot i}\right] = \left[e^{\varphi \cdot 2k \cdot i} - e^{-\varphi \cdot 2k \cdot i}\right] = 2 \cdot i \cdot sin(2k \cdot \varphi)$$

$$\left[e^{\varphi \cdot (2k-1) \cdot i} - (-1)^{2k-1} e^{-\varphi \cdot (2k-1) \cdot i}\right] = \left[e^{\varphi \cdot (2k-1) \cdot i} + e^{-\varphi \cdot (2k-1) \cdot i}\right] = 2 \cdot cos((2k-1) \cdot \varphi),$$

so liefert der Vergleich von Realteil und Imaginärteil die trigonometrischen Bildreihen

(22) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{2k} \cdot \zeta(2k-\alpha) \cdot r^{2k} \cdot sin(2k \cdot \varphi) = -\frac{1}{2} \cdot r^{\alpha} \cdot sin(\alpha \cdot \varphi)}$$

(23) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{2k-1} \cdot \zeta(2k-1-\alpha) \cdot r^{2k-1} \cdot cos((2k-1) \cdot \varphi) = -\frac{1}{2} \cdot r^{\alpha} \cdot cos(\alpha \cdot \varphi)}$$

mit $\underline{r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+y^2}}$ und $\underline{\varphi = arctan(y)}$.

Die reellen Parameter α und y sind wählbar in den Bereichen $\underline{0 < \alpha < 1}$ und $\underline{|y| \le \sqrt{3}}$.

Für $y = 1$: $r = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$ und $y = \sqrt{3}$: $r = 1$, $\varphi = \pi/3$ sind nachfolgend die Bildreihen aufgeführt:

(22a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k-\alpha)}{2^k}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{\alpha}}}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(23a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^k}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{1+\alpha}}}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(22b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\zeta(2k-\alpha)\cdot sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

(23b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

Für $\alpha=1/2$ folgen hieraus die Reihen

(22c) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{1/2}{4k-2}\cdot\frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\zeta\left(\frac{8k-5}{2}\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\binom{1/2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\binom{1/2}{6}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\zeta\left(\frac{11}{2}\right)+\binom{1/2}{10}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\zeta\left(\frac{19}{2}\right)-+...=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

(23c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k-1}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\zeta\left(\frac{4k-3}{2}\right)\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\binom{1/2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-\binom{1/2}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-\binom{1/2}{5}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\zeta\left(\frac{9}{2}\right)+--...=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

(22d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k}\cdot\zeta\left(\frac{4k-1}{2}\right)\cdot sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$\left[\binom{1/2}{2}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\binom{1/2}{4}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)\right]+\left[\binom{1/2}{8}\cdot\zeta\left(\frac{15}{2}\right)-\binom{1/2}{10}\cdot\zeta\left(\frac{19}{2}\right)\right]+...=-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}$$

(23d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k-1}\cdot\zeta\left(\frac{4k-3}{2}\right)\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}$$

$$\left[\binom{1/2}{1}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-2\binom{1/2}{3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\binom{1/2}{5}\zeta\left(\frac{9}{2}\right)\right]+\left[\binom{1/2}{7}\zeta\left(\frac{13}{2}\right)-2\binom{1/2}{9}\zeta\left(\frac{17}{2}\right)+..\right]+...=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\ .$$

6.2.3. Der Fall $\alpha < 0$.

Mit $\lambda = 1$ und $\underline{\mu = \beta := -\alpha}$, $0 < \beta$, gilt $k_0 = [1-\beta]+1 = 1$.

Es folgt der Ansatz $g(z) = \frac{1}{(1+z)^\beta} - \sum_{k=0}^{0} \binom{-\beta}{k} \cdot z^k = \frac{1}{(1+z)^\beta} - 1$, $|z| < 1$, $z \neq 0$,

$$G(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{1}{(1+z/n)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right] = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right].$$

Der Grenzwert läßt sich mit der <u>Hurwitzschen Zetafunktion</u> $\zeta(x,a)$ ausdrücken, (***6.2.4.*** 5):

$$\underline{G(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right] = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta} - \zeta(\beta).}$$

Damit gilt für die Bildfunktion

$$F_{1,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{0} \binom{-\beta}{k} \cdot \zeta_*(k+\beta) \cdot z^k + G_{1,\beta}(z) = \zeta(\beta) + G(z) = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta} \; .$$

Die Transformationsregel für alle $|z| < 1$, $z \neq 0$ und $0 < \beta$ lautet

$$\frac{1}{(1+z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \cdot z^k \quad \bullet\!\xrightarrow{1,\beta} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \cdot \zeta(k+\beta) \cdot z^k = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta}$$
$$= \zeta(\beta) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right].$$

und liefert die Bildreihe

(24) $$\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \zeta(k+\beta) \cdot z^k = \zeta(\beta) - \beta \cdot \zeta(1+\beta) \cdot z + \binom{-\beta}{2} \zeta(2+\beta) \cdot z^2 + \ldots = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta}}$$

$|z| < 1$, $z \neq 0$, $0 < \beta$, $\beta \neq 1$

Anmerkung:

Für den Binomialkoeffizienten gilt $\binom{-\beta}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k-1+\beta}{k}$.

6.2.4. *Anmerkungen zur Hurwitzschen Zetafunktion*

Siehe hierzu z. B. **Whittaker/Watson** XIII 13.5.

1) Die Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s,z)$ mit dem komplexen Parameter $z \neq 0,-1,-2,\ldots$ ist eine auf der komplexen s-Ebene meromorphe Funktion mit dem einfachen Pol $s=1$.
Sie ist die analytische Fortsetzung der in 2) definierten Reihe.

Die folgenden Eigenschaften werden nur für reelles $s = x > 0,\ x \neq 1$ *formulier*t.

2) $$\zeta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^x} \quad , \quad x > 1 .$$

3) $$\zeta(x,z) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+z)^x} - \frac{(N+z)^{1-x}}{1-x} \right] \quad , \quad x > 0,\ x \neq 1 .$$

4) $\zeta(x) = \zeta(x,1)$ Die Riemannsche Zetafunktion ist ein Spezialfall, (vgl. **1.**).

5) $$\zeta(x,z) - \zeta(x) = \frac{1}{z^x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+z)^x} - \frac{1}{n^x} \right] .$$

Für $x > 1$ *ist das klar*.
Für $0 < x < 1$ *folgt* 5) *wegen* $(N+z)^{1-x} - (N)^{1-x} = (1-x)\cdot z \cdot N^{-x} + O\left(N^{-x-1}\right) \to 0$.

6) $$\zeta(x,-z) - \zeta(x,1-z) = \frac{1}{(-z)^x} \quad , \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

6) f*olgt aus* 5)*, denn* $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{(n-z)^x} - \frac{1}{(n+1-z)^x} \right] = \frac{1}{(1-z)^x} - \frac{1}{(N+1-z)^x}$.

7) $$\lim_{x\to 1} \left[\zeta(x,z) - \zeta(x) \right] = \psi(1) - \psi(z) = -\gamma - \psi(z)$$

Diese Beziehung folgt aus 5) *und* ***4.3.3.*** 1) – 3).

Nach 3) *ergeben sich die Ableitungen nach z* :

8) $$\frac{d}{dz}\zeta(x,z) = -x \cdot \zeta(1+x,z) \ , \quad \frac{d^n}{dz^n}\zeta(x,z) = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(x)} \cdot \zeta(n+x,z)$$

9) $$\zeta(2,z) = \frac{d}{dz}\psi(z) \ , \quad \zeta(n+1,z) = \frac{-1}{n} \cdot \frac{d}{dz}\zeta(n,z) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n}\psi(z), \quad n \geq 2 \ .$$

9) *gilt wegen* ***4.3.3.*** 1): $\displaystyle\frac{d}{dz}\psi(z) = \frac{d}{dz}\left[-\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1+z} - \frac{1}{n} \right) \right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+z)^2}$ *und* 8) .

10) $$\zeta\left(x,\frac{1}{2}\right)=\left(2^x-1\right)\cdot\zeta(x) \quad , \ x>1 \ .$$

Denn $$\zeta\left(x,\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^x}{(2n+1)^x}=2^x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\cdot n)^x}\right).$$

11) Speziell gilt wegen $\zeta(2m)=\frac{\cdot 2^{2m-1}}{(2m)!}\cdot\left|B_{2m}\right|\cdot\pi^{2m}$ (Bernoullizahlen B_{2m})

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\,,\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}\,,\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945} \ \text{ und } \ \zeta\left(2,\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}\,,\ \zeta\left(4,\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^4}{6}\,,\ \zeta\left(6,\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^6}{15}\,.$$

6.2.5. Zusammenstellung zugehöriger Bildreihen ($\alpha < 0$)

Aus der Bildreihe **(24)** ggf. in der Form

(24*) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{k-1+\beta}{k}\zeta(k+\beta)\cdot z^k=\zeta(\beta,z)-\zeta(\beta)-\frac{1}{z^\beta}\,,\quad |z|<1,\ z\neq 0\,,\ \beta>0,\ \beta\neq 1$$

sind in vielfältiger Weise weitere Bildreihen kombinierbar.

a) Für $\underline{\beta\to 1}$ erhält man nach **6.2.4.** 7) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{k}{k}\cdot\zeta(k+1)\cdot z^k=-\gamma-\psi(z)-\frac{1}{z}$.

Das ist die <u>Bildreihe **(9*)**</u> aus dem Abschnitt **4.4.2.** !

b) Sei $\underline{\beta=n+1\geq 2,\ \text{ganzz.}}$, $|z|<1,\ z\neq 0$

Dann gilt nach **(24*)** mit $\binom{k+n}{k}=\binom{n+k}{n}$ und **6.2.4.** 9)

(25) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k}{n}\zeta(n+k+1)\cdot z^k=\zeta(n+1,\,z)-\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\psi^{(n)}(z)-\frac{1}{z^{n+1}}$$

Diese Reihe entspricht <u>der *n*-ten Ableitung</u> von **(9*)** !

Für $\underline{z=1/2}$ und $\underline{m\geq 2,\ \text{ganzz.}}$ ensteht aus **(25)** die Reihe

(26) $$\underline{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1+k}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+k)}{2^k}=\zeta(m)-\binom{m}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+1)}{2^1}+\binom{m+1}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+2)}{2^2}-+\ldots=}$$
$$\underline{=\zeta\left(m,\frac{1}{2}\right)-2^m=\left(2^m-1\right)\cdot\zeta(m)-2^m}$$

Zum Beispiel gilt für $m=2$: $\zeta(2)-\binom{2}{1}\cdot\frac{\zeta(3)}{2^1}+\binom{3}{1}\cdot\frac{\zeta(4)}{2^2}-\binom{4}{1}\cdot\frac{\zeta(5)}{2^3}+-...=\frac{\pi^2}{2}-4$ bzw.

$$\textbf{(26a)}\quad \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\frac{\zeta(k+1)}{2^{k-1}}=2\cdot\frac{\zeta(3)}{2^1}-3\cdot\frac{\zeta(4)}{2^2}+4\cdot\frac{\zeta(5)}{2^3}-5\cdot\frac{\zeta(6)}{2^4}+-...=4-\frac{\pi^2}{3}\ .$$

Analog findet man für $m=4$:

$$\textbf{(26b)}\quad \sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{k}{3}\cdot\frac{\zeta(k+1)}{2^{k-2}}=\binom{4}{3}\cdot\frac{\zeta(5)}{2^2}-\binom{5}{3}\cdot\frac{\zeta(6)}{2^3}+\binom{6}{3}\cdot\frac{\zeta(7)}{2^4}-+...=8-\frac{7\cdot\pi^4}{90}\ .$$

c) Aus **(24*)** und **6.2.4.** 6) findet man analog zu **6.2.3.** **(20)** die zusammengesetzte Bildreihe

$$\textbf{(27)}\quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot\left[z^k-(z-1)^k\right]=\frac{1}{(1-z)^{\beta}}}\ ,\quad |z|<1,\ |z-1|<1,\quad \beta>0\ .$$

Wegen **a)** und ***4.3.3.*** 3) ist die Reihe auch für $\beta=1$ gültig!

Für $z=1/2$ erhält man die spezielle Reihe

$$\textbf{(27a)}\quad \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k+\beta}{2k+1}\cdot\frac{\zeta(2k+1+\beta)}{4^k}=\beta\cdot\zeta(1+\beta)+\binom{2+\beta}{3}\cdot\frac{\zeta(3+\beta)}{4^1}+\binom{4+\beta}{5}\cdot\frac{\zeta(5+\beta)}{4^2}+...=2^{\beta}$$

und insbesondere mit $\beta=1$ die Reihe **(8b)** aus **4.2.2.**.

d) Anknüpfend an **6.2.2.** können aus **(27)** trigonometrische Reihen erzeugt werden.

Mit $z=\frac{1}{2}(1+y\cdot i)=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ und $1-z=\bar{z}=r\cdot e^{-\varphi\cdot i}$ erhält **(27)** die Form

$$\textbf{(27\#)}\quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot r^k\cdot\left[e^{\varphi\cdot k\cdot i}-(-1)^k e^{-\varphi\cdot k\cdot i}\right]=r^{-\beta}\cdot[\cos(\varphi\cdot\beta)+i\cdot\sin(\varphi\cdot\beta)]}.$$

Für die Parameter β und y sind folgende Bereiche zulässig: $\underline{\beta>0}$, $\underline{|y|<\sqrt{3}}$.

Weiterhin gilt $\underline{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$, $\underline{\varphi=\arctan(y)}$.

Der Vergleich von Real- und Imaginärteilen beider Seiten liefert analog **6.2.2** schließlich die trigonometrischen Teilreihen:

(28) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\zeta(2k+\beta)\cdot r^{2k}\cdot sin(2k\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot sin(\beta\cdot\varphi)}$$

(29) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1+\beta)\cdot r^{2k-1}\cdot cos((2k-1)\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot cos(\beta\cdot\varphi)}\ .$$

Hieraus resultieren z.B. folgende Reihen:

$y=1,\ r=1/\sqrt{2}\,,\ \varphi=\pi/4\ .$

(28a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{2^{k-1}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2^{\beta}}\cdot sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(29a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{2^{k-1}}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2^{\beta-1}}\cdot cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$y=1/\sqrt{3}\,,\ r=1/\sqrt{3}\,,\ \varphi=\pi/6\ .$

(28b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{3^{k}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta}}\cdot sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

(29b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{3^{k}}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta-1}}\cdot cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right).$$

Mit geeigneten Werten für β entstehen viele einprägsame spezielle Zahlenreihen.

Setze z. B. $\beta=1$ sowie $\beta=2$ in **(28a)** und **(29a)** ein:

(28c) $$\frac{\zeta(3)}{4^0}-\frac{\zeta(7)}{4^1}+\frac{\zeta(11)}{4^2}-\frac{\zeta(15)}{4^3}+\frac{\zeta(19)}{4^4}-\frac{\zeta(23)}{4^5}+...=1$$

(28d) $$3\cdot\frac{\zeta(4)}{2^1}-7\cdot\frac{\zeta(8)}{2^3}+11\frac{\zeta(12)}{2^5}-15\cdot\frac{\zeta(16)}{2^7}+19\cdot\frac{\zeta(20)}{2^9}-+...=1$$

(29c) $$\frac{\zeta(2)}{2^0}-\frac{\zeta(4)}{2^1}-\frac{\zeta(6)}{2^2}+\frac{\zeta(8)}{2^3}+\frac{\zeta(10)}{2^4}-\frac{\zeta(12)}{2^5}-\frac{\zeta(14)}{2^6}++--...=1$$

(29d) $$2\cdot\frac{\zeta(3)}{2^0}-4\cdot\frac{\zeta(5)}{2^1}-6\cdot\frac{\zeta(7)}{2^2}+8\cdot\frac{\zeta(9)}{2^3}+10\cdot\frac{\zeta(11)}{2^4}--++...=0$$ u.s.w. .

7. Bildfunktionen der Exponential- und trigonometrischen Funktionen

7.1. Die allgemeine Transformationsformel $\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}\{exp(x)\}$

Gegeben ist die Exponentialreihe $f(z) = exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k$, z beliebig komplex.

Mit beliebigen reellen $\lambda > 0$,μ sind

$$g(z) = exp(z) - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} \cdot z^k \quad , \qquad k_0 = min\{k \mid \lambda \cdot k + \mu > 1 ,k \geq 0\}$$

$$\underline{G_{\lambda,\mu}(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\mu} g\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n^\mu} exp\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k+\mu}} \right]}.$$

Die gesuchte Bildfunktion hat die Form

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda\cdot k+\mu) \cdot z^k + G_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda\cdot k+\mu) \cdot z^k \quad .$$

7.2. Die Bildfunktionen $\mathbf{Z}_{1,0}\{exp(z)\}$, $\mathbf{Z}_{\lambda,1}\{exp(z)\}$ und $\mathbf{Z}_{\lambda,\mu>1}\{exp(z)\}$

7.2.1. Bildgrenzwerte und Transformationsregeln

Für $\lambda = 1, \mu = 0$ und $k_0 = 2$ folgt der Ansatz

$$g(z) = exp(z) - 1 - z , \qquad \underline{G_{1,0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1 - \frac{z}{n} \right]} ,$$

Für $\lambda > 0, \mu = 1$ und $k_0 = 1$ folgt der Ansatz

$$g(z) = exp(z) - 1 , \qquad \underline{G_{\lambda,1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot exp\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) - \frac{1}{n} \right]}$$

Für $\lambda > 0, \mu > 1$ und $k_0 = 0$ folgt der Ansatz

$$g(z) = exp(z) , \qquad \underline{G_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^\mu} \cdot exp\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) \right]} \quad .$$

Die Transformationsregeln für alle $|z| < \infty$ lauten demnach

$$exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k \xrightarrow{1,0} E_{1,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(k) \cdot z^k = \gamma \cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1 - \frac{z}{n} \right]$$

$$\xrightarrow{\lambda,1} E_{\lambda,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + 1) \cdot z^k = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} exp\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) - \frac{1}{n} \right]$$

$$\xrightarrow{\lambda,\mu>1} E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^\mu} exp\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) \right].$$

Offensichtlich (und nach Regel R(7)) gilt der differentielle Zusammenhang

$$\frac{d^m}{dz^m} E_{\lambda,\mu}(z) = E_{\lambda,\mu+m\cdot\lambda}(z) \quad .$$

Aus der Definition von γ folgt $G_{1,0}(z) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1 \right) - z \cdot ln(N) \right] - \gamma \cdot z$.

Setzt man $\underline{E(z) := \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \left(exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1 \right) - z \cdot ln(N) \right]}$, so gilt

(30) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_*(k)}{k!} \cdot z^k = \gamma \cdot z + \frac{\zeta(2)}{2!} \cdot z^2 + \frac{\zeta(3)}{3!} \cdot z^3 + \frac{\zeta(4)}{4!} \cdot z^4 + \ldots = E(z)$$

Bei bekanntem $E(z)$ erhielte man aus Reihe **(30)** weitere Ergebnisse wegen

$$E(z) = E_{1,0}(z), \quad \frac{d^m}{dz^m} E(z) = E^{(m)}(z) = E_{1,m}(z) \quad .$$

7.2.2. Ein Beispiel: Die Bildreihe als Wahrscheinlichkeitsdichte

Wir bilden für beliebige reelle Werte x und $\underline{m > 3}$ die Reihen $f(x,m) := E_{2,m+1}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

$$\underline{f(x,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \zeta(2k+1+m) x^{2k} = \zeta(m+1) - \frac{1}{2}\zeta(m+3) \cdot x^2 + \frac{1}{2! \cdot 2^2} \zeta(m+5) \cdot x^4 - \ldots}.$$

Die zugehörige Bildfunktion lautet

$$f(x,m) = \lim_{N\to\infty} f_N(x,m) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^m} \cdot \frac{1}{n} \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot n^2}\right) = \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^m} \cdot \phi(x,n) \text{ ,}$$

wobei $\phi(x,n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot n}\cdot exp\left(-\dfrac{x^2}{2\cdot n^2}\right)$ die Wahrscheinlichkeitsdichten von Normalverteilungen mit dem Erwartungswert 0 und den Varianzen n^2 sind.

Die Funktion **(31)** $f_*(x,m) = \dfrac{1}{\zeta(m)\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot f(x,m) = \dfrac{1}{\zeta(m)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^m}\cdot\phi(x,n)$
ist die Dichte einer Verteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz $\zeta(m-2)/\zeta(m)$.

Die Verteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert und ihre Verteilungsfunktion ist

$$F_*(x,m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\zeta(m)\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\int_0^x f(\xi,m)\,d\xi \quad .$$

Beweis: Es ist $f(x,m) > 0$, stetig und $f(-x,m) = f(x,m)$ wegen $\phi(-x,n) = \phi(x,n)$,

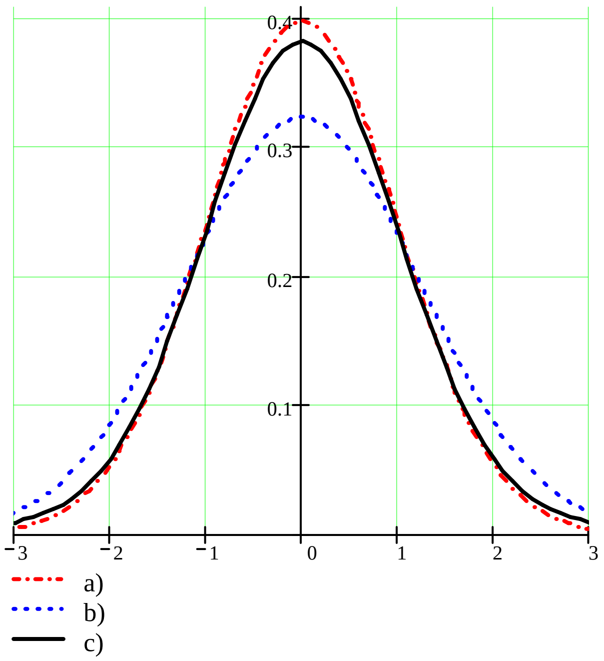
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot 1 \to \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\zeta(m)\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_N(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\phi(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot 0 \ = \ 0\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_N(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\phi(x,m)dx = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^m}\cdot n^2 \to \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\zeta(m-2)\ .$$

□

Das Bild stellt Dichtefunktionen für $m = 4$ dar:



a) Normalverteilung $\phi(x,1)$ mit $\sigma^2 = 1$

und $\phi(0,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \approx 0{,}3989$

b) Normalverteilung $\phi(x,\sigma)$ mit

$\sigma^2 = \dfrac{\zeta(2)}{\zeta(4)} = \dfrac{15}{\pi^2} \approx 1{,}2328$ und

$\phi(0,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{30}} \approx 0{,}3236$

c) Die Verteilung $f_*(x,4)$ mit gleichem

$\sigma^2 = \dfrac{\zeta(2)}{\zeta(4)}$ und dem Maximum

$f_*(0,4) = \dfrac{\zeta(5)}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\zeta(4)} \approx 0{,}3821$.

Die Kurven b) und c) verdeutlichen die Tatsache, dass $f_*(x,m)$ keine Nomalverteilung ist!
a) zeigt die resultierende Dichte f_*, wenn alle Dichten $\phi(x,n)$ durch $\phi(x,1)$ ersetzt werden.

Anmerkung:

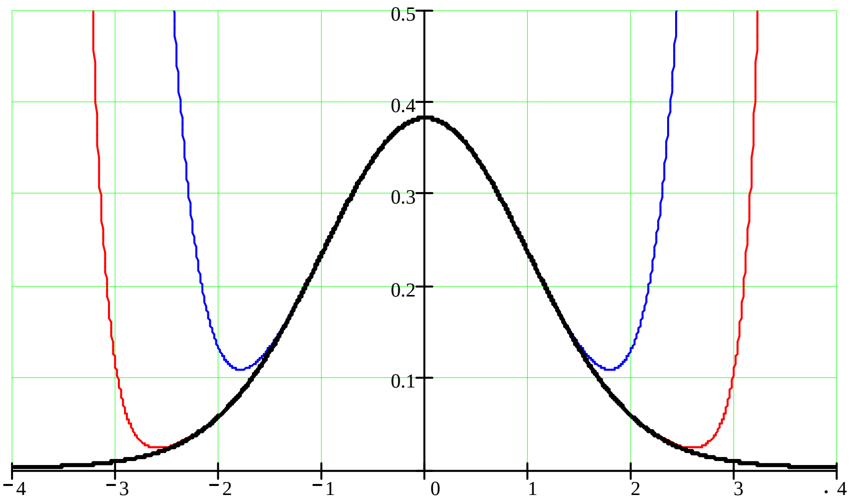
Der Verteilungsfunktion $F_*(x,m)$ *liegt folgendes Versuchsschema zu Grunde:*
Ein System kann beim Aktivieren genau einen der Zustände $n = 1, 2, 3, \ldots$ *mit dem Sollwert 0 annehmen. Der Zustand n tritt dabei mit der relativen Häufigkeit* $n^{-m}/\zeta(m)$, $m > 3$, *auf.*
Jeder Zustand n kann eine Abweichung x vom Sollwert besitzen. Diese Abweichung ist normalverteilt mit der Varianz $\sigma^2 = n^2.$
$F_*(x,m) = P(X < x)$ *ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Aktivierung des Systems die Abweichung kleiner als x ist.*

Aus der Interpretation als Dichte und Verteilungsfunktion ergeben sich Grenzwerteausagen für die Reihen $f_*(x,m)$ und $F_*(x,m)$ für $\underline{x \to \infty}$ und $\underline{m > 3}$:

(31a) $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\zeta(2k+1+m)}{k! \cdot 2^k} \cdot x^{2k} = \zeta(m+1) - \frac{\zeta(m+3)}{2} \cdot x^2 + \frac{\zeta(m+5)}{2! \cdot 2^2} \cdot x^4 - + \ldots \to 0$$

(31b) $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\zeta(2k+1+m)}{(2k+1) \cdot k! \cdot 2^k} \cdot x^{2k+1} = \zeta(m+1) \cdot x - \frac{\zeta(m+3)}{3 \cdot 2} \cdot x^3 + \frac{\zeta(m+5)}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot x^5 - + \ldots$$
$$\to \frac{1}{2} \cdot \zeta(m) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}$$

Da die Potenzreihenentwicklungen an der Stelle $x = 0$ erfolgten, sind **(31a)** , **(31b)** kaum numerisch nachvollziehbar.
Die Abbildung zeigt die Näherungspolynome von $f_*(x, 4)$ bis zur 8. bzw. 20. Potenz !



7.3. Bildfunktionen der trigonometrischen Funktionen

7.3.1. Die Darstellung mittels der Bildfunktion $E_{\lambda,\mu}(i z)$

Auf Grund der Regeln R(2), R(3) ergeben sich aus der Darstellung der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion analoge Darstellungen ihrer Bilder.

$$sin(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot z^{2k+1} \xrightarrow{\lambda,\mu} S_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)\cdot z^{2k+1}$$

$$=\frac{exp(i z)-exp(-i z)}{2i} \qquad\qquad =\underline{\frac{E_{\lambda,\mu}(i z)-E_{\lambda,\mu}(-i z)}{2i}}$$

$$cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot z^{2k} \xrightarrow{\lambda,\mu} C_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot 2k+\mu)\cdot z^{2k}$$

$$=\frac{exp(i z)+exp(-i z)}{2} \qquad\qquad =\underline{\frac{E_{\lambda,\mu}(i z)+E_{\lambda,\mu}(-i z)}{2}}$$

Die Bildfunktionen $S_{\lambda,\mu}$ und $C_{\lambda,\mu}$ sind an der Stelle $z=0$ in <u>Potenzreihen</u> entwickelt.
Anderseits lassen sich aus den obigen Darstellungen mittels mit **7.2.1** die Grenzwerte für die Bildfunktionen als (im wesentlichen) <u>trigonometrische Reihen</u> aufstellen:

$$S_{1,0}(z)=\gamma\cdot z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[sin\left(\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right] \qquad C_{1,0}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[cos\left(\frac{z}{n}\right)-1\right]$$

$$S_{\lambda,1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right] \qquad C_{\lambda,1}(z)=\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)-\frac{1}{n}\right]$$

$$S_{\lambda,\mu>1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\mu}}\cdot sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right] \qquad C_{\lambda,\mu>1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\mu}}\cdot cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right].$$

Im Unterschied zu den Fourier-Reihen werden nicht trigonometrische Funktionen von *Vielfachen* des Arguments überlagert, sondern von *Bruchteilen* des Arguments.
Für diese gilt z. B. nicht die Orthogonalitätsbedingung !

Für $\lambda=1, \mu=0$ gelten in Analogie zu $E(z)$ aus **7.2.1.** bzw. **(30)** die Abkürzungen

$$S(z):=S_{1,0}(z)=\frac{E(i z)-E(-i z)}{2i} \quad , \quad C(z):=C_{1,0}(z)=\frac{E(i z)+E(-i z)}{2}$$

mit den Grenzwerten

$$S(z) := \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}sin\left(\frac{z}{n}\right)-z\cdot ln(N)\right] \quad , \quad C(z) := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(cos\left(\frac{z}{n}\right)-1\right) \text{ (s. o.) } .$$

7.3.2. Einige Eigenschaften der Bildfunktionen $S_{\lambda,\mu}(z)$ und $C_{\lambda,\mu}(z)$

Aus den Darstellungen von *S* und *C* als Potenz- bzw. trigonometrische Reihen können viele Eigenschaften der Bildfunktionen gewonnen werden. Aufgrund der Transformationsregeln sind gewisse Ähnlichkeiten zu den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zu erkennen.

1) Differentielle Zusammenhänge

$$\underline{\frac{d}{dz} S_{\lambda,\mu}(z) = C_{\lambda,\ \mu+\lambda}(z)} \qquad \underline{\frac{d}{dz} C_{\lambda,\mu}(z) = -S_{\lambda,\ \mu+\lambda}(z)}$$

$$\frac{d^{2m}}{dz^{2m}} S_{\lambda,\mu}(z) = (-1)^m S_{\lambda,\ \mu+2m\cdot\lambda}(z) \qquad \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} C_{\lambda,\mu}(z) = (-1)^m C_{\lambda,\ \mu+2m\cdot\lambda}(z)$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}} S_{\lambda,\mu}(z) = (-1)^m C_{\lambda,\ \mu+(2m+1)\cdot\lambda}(z) \qquad \frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}} C_{\lambda,\mu}(z) = (-1)^m S_{\lambda,\ \mu+(2m+1)\cdot\lambda}(z)$$

2) Unter Verwendung von 1) führen Koeffizienten der Taylorentwicklung auf die Beziehung

$$\underline{\zeta_*(\lambda\cdot n+\mu) = C_{\lambda,\mu+n\cdot\lambda}(0)}$$

Nachweis:

$$\text{Für } S_{\lambda,\mu}(z) \text{ gilt } a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\cdot(-1)^k C_{\lambda,\ \mu+(2k+1)\cdot\lambda}(z) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)$$

$$\text{Für } C_{\lambda,\mu}(z) \text{ gilt } a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}\cdot(-1)^k C_{\lambda,\ \mu+2k\cdot\lambda}(z) = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot 2k+\mu)$$

Die Formel folgt auch sofort aus der Reihe

$$C_{\lambda,\mu+n\cdot\lambda}(z) = \zeta_*(\lambda\cdot 0+\mu+\lambda\cdot n)\cdot z^0 - \zeta_*(\lambda\cdot 2+\mu+\lambda\cdot n)\cdot\frac{z^2}{2!}+\dots\ .$$

3) In Analogie zur Eulerschen Formel gilt

$$\underline{E_{\lambda,\mu}(i\,z) = C_{\lambda,\mu}(z)+i\cdot S_{\lambda,\mu}(z)}$$

4) Symmetrieeigenschaften

$$S_{\lambda,\mu\ \geq 1}(-z) = -S_{\lambda,\mu\ \geq 1}(z) \qquad C_{\lambda,\mu\ \geq 1}(-z) = C_{\lambda,\mu\ \geq 1}(z)$$

$$S_{1,0}(-z) = -S_{1,0}(z) \qquad C_{1,0}(-z) = C_{1,0}(z)$$

5) Die Funktionen $F(x) = S_{\lambda,\mu\ \geq 1}(x)$ bzw. $F(x) = C_{\lambda,\mu\ \geq 1}(x)$ mit reellem Argument x sind für <u>ganzzahlige</u> $\lambda = m = 1,2, \ldots$ auf Grund folgender Eigenschaft „fast periodisch":

> Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $p = p(\varepsilon)$ derart, dass für alle x gilt
>
> $$|F(x + 2 \cdot \pi \cdot p) - F(x)| < \varepsilon .$$
>
> Für $\varepsilon \to 0$ gilt $p(\varepsilon) \to \infty$.

Beweis (für C):

Die Summe $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot cos\left(\frac{x}{n^m}\right)$ *ist periodisch. Wählt man nämlich das kleinste gemeinsame Vielfache* $v(N) = kgV(1,2,\ldots,N)$ *der Zahlen* $n = 1,2,\ldots,N$ *,so gilt, da* $\frac{v(N)}{n}$ *ganzzahlig ist,*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left[cos\left(\frac{x + v(N)^m \cdot 2 \cdot \pi}{n^m}\right) - cos\left(\frac{x}{n^m}\right) \right] = 0.$$

Es ist N derart zu bestimmen, dass folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left[cos\left(\frac{x + v(N)^m \cdot 2 \cdot \pi}{n^m}\right) - cos\left(\frac{x}{n^m}\right) \right] \right| <$$

$$< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left| cos\left(\frac{x + v(N)^m \cdot 2 \cdot \pi}{n^m}\right) - cos\left(\frac{x}{n^m}\right) \right| < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot 2 = 2 \cdot \zeta(\mu) - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^{\mu}} < \varepsilon \ .$$

Dies ist stets möglich, da die Summe gegen $2 \cdot \zeta(\mu)$ *konvergiert.*

Man wähle zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} > \zeta(\mu) - \frac{\varepsilon}{2}$ und bilde das kleinste gemeinsam Vielfache $v(N) = kgV(1,2,\ldots,N)$. Dann ist $p(\varepsilon) = v(N)^m$.

Mit $\varepsilon \to 0$ *geht* $N(\varepsilon) \to \infty$ *und damit auch* $p(\varepsilon) = v(N)^m \to \infty$.

6) Die in 5) genannten Funktionen sind beschränkt:

$$|S_{\lambda,\mu>1}(x)| \leq \zeta(\mu) \quad , \qquad |C_{\lambda,\mu>1}(x)| \leq \zeta(\mu) \ .$$

Denn es ist z. B. $|S_{\lambda,\mu>1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left| sin\left(\frac{x}{n^{\lambda}}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot 1 = \zeta(\mu)$.

7.3.3. Ein veranschaulichendes Beispiel

Gegeben ist die Funktion

$$C_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \zeta(2k+2) \cdot z^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{z}{n}\right).$$

Wir bilden die Näherungen (für reelle x)

$$P(x,N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \zeta(2k+2) \cdot x^{2k} = \zeta(2) - \frac{1}{2} \cdot \zeta(4) \cdot x^2 + \ldots + \frac{(-1)^N}{(2N)!} \cdot \zeta(2N+2) \cdot x^{2N}$$

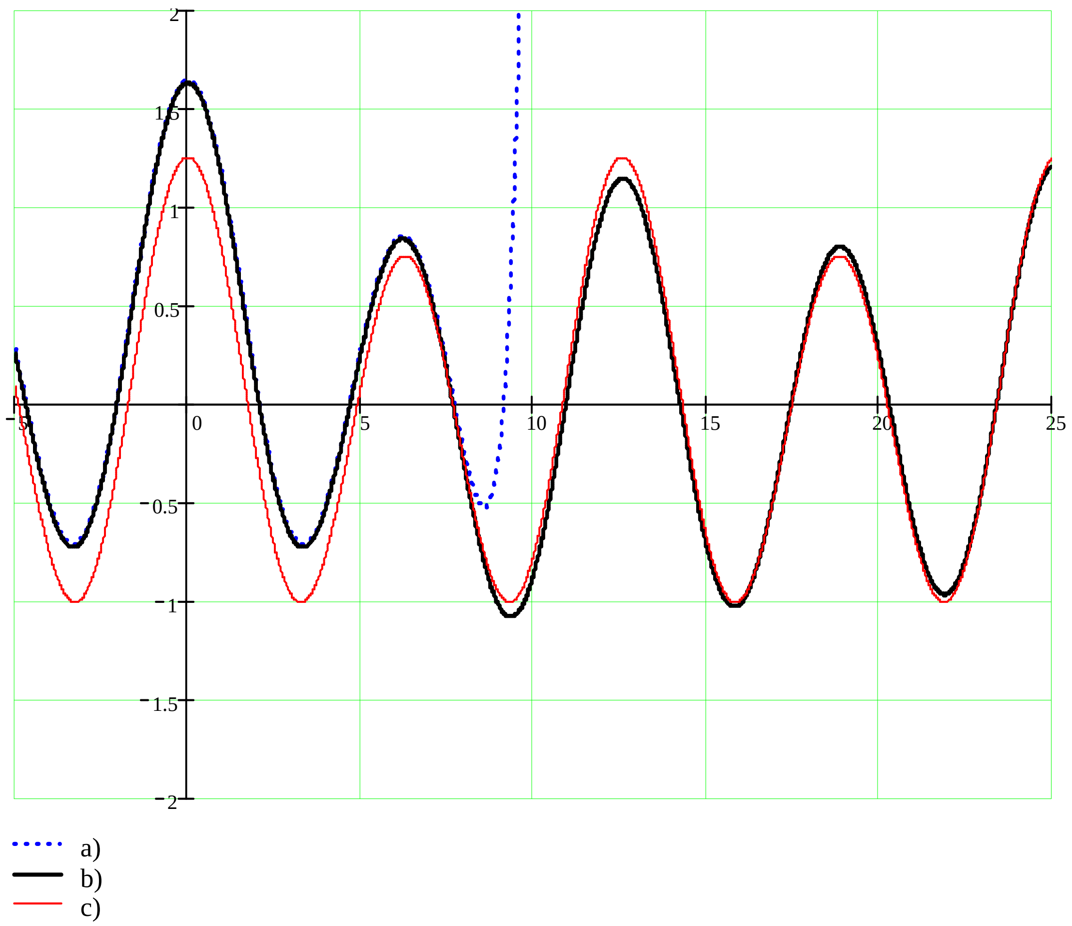
$$C(x,m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{n}\right) = \cos(x) + \frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{m^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{m}\right).$$

Es ist $\max C_{1,2}(x) = C_{1,2}(0) = \zeta(2) = \pi^2/6 \approx 1{,}6449\ldots$ (Vgl. **7.3.2.** 6))

Mit $\underline{\varepsilon = 0{,}8}$ ist $N = 2$, denn $\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n^2} = 1{,}25 > \zeta(2) - \frac{0{,}8}{2} = 1{,}2449\ldots$, $p(\varepsilon) = v(2)^1 = 2$.

Für alle x gilt $\left|C_{1,2}(x + 4 \cdot \pi) - C_{1,2}(x)\right| < 0{,}8$. (Vgl.**7.3.2.** 5))

In der Grafik sind a) $P(x,10)$, b) $C_{1,2}(x) \approx C(x,60)$ und c) $C(x,2)$ dargestellt.



7.4. Uneigentliche Integrale mit $E_{\lambda,\mu}(z)$, $S_{\lambda,\mu}(z)$ und $C_{\lambda,\mu}(z)$

7.4.1. Verwendete Integrale

Für die nachfolgenden Ausführungen werden drei für $x > 0$ geltende Integrale bereitgestellt:

(1) $$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot z^n \, dz = x^{n+1} \cdot n! \qquad ,$$

(2) $$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot cos\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) dz = \frac{1}{x^{-2} + n^{-\lambda \cdot 2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{1 + \left(\frac{x}{n^\lambda}\right)^2} \qquad ,$$

(3) $$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot sin\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) dz = \frac{1}{x^{-2} + n^{-\lambda \cdot 2}} \cdot \frac{1}{n^\lambda} = \frac{1}{n^\lambda} \cdot \frac{x^2}{1 + \left(\frac{x}{n^\lambda}\right)^2} \; .$$

(1) *folgt mit der Substitution* $t = z/x$ *aus der Integraldefinition der Gammafunktion*

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^n \, dt \; .$$

(2) *und* (3) *ergeben sich aus*

$$\int e^{-a \cdot z} \cdot cos(b \cdot z) dz = \frac{e^{-a \cdot z}}{a^2 + b^2} \cdot (-a \cdot cos(b \cdot z) + b \cdot sin(b \cdot z)) \; ,$$

$$\int e^{-a \cdot z} \cdot sin(b \cdot z) dz = \frac{e^{-a \cdot z}}{a^2 + b^2} \cdot (-a \cdot sin(b \cdot z) - b \cdot cos(b \cdot z)) \; .$$

7.4.2. Bildreihen der uneigentlichen Integrale

Wendet man (1) (gliedweise!) auf die Potenzreihen von $E_{\lambda,\mu}(z)$, $C_{\lambda,\mu}(z)$ und $S_{\lambda,\mu}(z)$ an, so erhält man Bildreihen, die offensichtlich für reelle $0 < x < 1$ konvergieren.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot E_{\lambda,\mu}(z) \, dz = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot z^k \, dz = \sum_{k=0}^\infty \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot x^{k+1}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot C_{\lambda,\mu}(z) \, dz = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \zeta_*(..)}{(2k)!} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot z^{2k} \, dz = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \zeta_*(\lambda \cdot 2k + \mu) \cdot x^{2k+1}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot S_{\lambda,\mu}(z) \, dz = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \zeta_*(..)}{(2k+1)!} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot z^{2k+1} \, dz = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \zeta_*(\lambda(2k+1) + \mu) \cdot x^{2k+2} \, .$$

In gleicher Weise wie für die Bildreihen können die uneigentlichen Integrale auch aus den Bildgrenzwerten berechnet werden:

a) Aus **7.2.1.** erhält man mit (1)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot E_{1,0}(z)\,dz = \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \gamma \cdot z\,dz + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[e^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n} \right] dz = \gamma \cdot x^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^3}{n \cdot (n-x)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot E_{\lambda,1}(z)\,dz = \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \gamma\,dz + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot e^{\frac{z}{n^\lambda}} - \frac{1}{n} \right] dz = \gamma \cdot x + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^2}{n \cdot \left(n^\lambda - x\right)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot E_{\lambda,\mu>1}(z)\,dz = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[\frac{1}{n^\mu} e^{\frac{z}{n^\lambda}} \right] dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\mu-\lambda}} \cdot \frac{x}{n^\lambda - x} \ .$$

b) Aus **7.3.1.** erhält man mit (2)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot C_{1,0}(z)dz = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[cos\left(\frac{z}{n}\right) - 1 \right] dz = -\sum_{n=1}^\infty \frac{x^3}{n^2 + x^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot C_{\lambda,\,1}(z)dz = \int_0^\infty \gamma \cdot e^{-\frac{z}{x}} dz + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot cos\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) - \frac{1}{n} \right] dz = \gamma \cdot x - \sum_{n=1}^\infty \frac{x^3}{n \cdot \left(n^{2\lambda} + x^2\right)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot C_{\lambda,\mu>1}(z)dz = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[\frac{1}{n^\mu} cos\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) \right] dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\mu-2\lambda}} \cdot \frac{x}{n^{2\lambda} + x^2}$$

c) Aus **7.3.1.** erhält man mit (3)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot S_{1,0}(z)dz = \int_0^\infty \gamma \cdot z \cdot e^{-\frac{z}{x}} dz + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[sin\left(\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right] dz = \gamma \cdot x^2 - \sum_{n=1}^\infty \frac{x^4}{n \cdot \left(n^2 + x^2\right)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot S_{\lambda,\mu\geq 1}(z)dz = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot \left[\frac{1}{n^\mu} sin\left(\frac{z}{n^\lambda}\right) \right] dz = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\mu-\lambda}} \cdot \frac{x^2}{n^{2\lambda} + x^2} \ .$$

Zusammenfassend gelten also folgende für $\underline{0 < x < 1}$ hergeleiteten Bildreihen, bei denen gelegentlich Kürzungen durch *x* erfolgten und erste Glieder umgeordnet wurden:

Nach **a)**

(32) $\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) \cdot x^k = \zeta(2) \cdot x^2 + \zeta(3) \cdot x^3 + \zeta(4) \cdot x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^2}{n - x}$,

(33) $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(\lambda \cdot k + 1) \cdot x^{k+1} = \zeta(\lambda + 1) \cdot x^2 + \zeta(2\lambda + 1) \cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^2}{n^{\lambda} - x}$

wobei für $\lambda = 1$ die Reihe **(32)** entsteht**.**

(34) $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot x^{k+1} = \zeta(\mu) \cdot x + \zeta(\lambda + \mu) \cdot x^2 + \zeta(2\lambda + \mu) \cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu - \lambda}} \frac{x}{n^{\lambda} - x}$

$(\mu > 1)$

Nach **b)**

(35) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2 \cdot k) \cdot x^{2 \cdot k} = \zeta(2) \cdot x^2 - \zeta(4) \cdot x^4 + \zeta(6) \cdot x^6 - + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^2}$,

(36) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(\lambda \cdot 2k + 1) \cdot x^{2 \cdot k} = \zeta(2\lambda + 1) \cdot x^2 - \zeta(4\lambda + 1) \cdot x^4 + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^2}{n^{2\lambda} + x^2}$

(37) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta(\lambda \cdot 2k + \mu) \cdot x^{2 \cdot k + 1} = \zeta(\mu) \cdot x - \zeta(2\lambda + \mu) \cdot x^3 + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu - 2\lambda}} \frac{x}{n^{2\lambda} + x^2}$

$(\mu > 1)$

Nach **c)**

(38) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k + 1) \cdot x^{2 \cdot k + 1} = \zeta(3) \cdot x^3 - \zeta(5) \cdot x^5 + - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^3}{n^2 + x^2}$

(39) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta(\lambda \cdot (2k + 1) + \mu) \cdot x^{2 \cdot k + 1} = \zeta(\lambda + \mu) \cdot x - \zeta(3\lambda + \mu) \cdot x^3 + - \ldots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu - \lambda}} \frac{x}{n^{2\lambda} + x^2} \; .$$

$(\mu \geq 1)$

7.4.3. Zusammenhänge mit der Digammafunktion und $Q_0(z,\ \lambda)$

In ihrer Form ähnliche Bildreihen wie in **7.4.2.** sind (für komplexe z) schon in **4.3.** und **4.4.** behandelt worden, so dass sich im Folgenden einige Beziehungen speziell zur Funktion $Q_0(z,\lambda)$ aus **4.3.2.** ergeben.

Für $\underline{\lambda = 1,\ \mu = 0}$ erhält man Identitäten für folgende Reihen, (siehe **4.4.2.**):

Mit $\underline{z := x}$ ist **(32)** = **(8)**, **(35)** = **(6)** und mit $\underline{z := i\,x}$ ist **(38)** = **(10)** .

Die Bild<u>funktionen</u> wurden dort mit der Digammafunktion, d. h. aus der logarithmischen Ableitung der Gammafunktion, gewonnen.
Die Summendarstellung der Integrale in **7.4.2.** für $E(x), C(x), S(x)$, beziehungsweise für die Reihen **(32)**, **(35)**, **(38)**, sind ebenfalls mit der Digammafunktion beschreibbar, (siehe ***4.3.3.***):

Mit $\psi(1-z)+\gamma = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n\cdot(n-z)}$ folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{x}}\, E(z)\,dz = -x^2 \cdot \psi(1-x) - \gamma\cdot x^2\,,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{x}}\, C(z)\,dz = -x^2 \cdot \frac{\psi(1+i\,x)-\psi(1-i\,x)}{2\cdot i} = \frac{1}{2}\cdot\left[x - \pi\cdot x^2 \cdot coth(\pi\cdot x)\right],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{x}}\, S(z)\,dz = -x^2 \cdot \frac{\psi(1+i\,x)+\psi(1-i\,x)}{2} = -x^2\cdot Re(\psi(1+i\,x)).$$

Man beachte $\psi(1-i\,x) = \overline{\psi(1+i\,x)}$.

Nach **4.3.2. c)** gilt $Q_0(z,1) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\cdot(n-z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n-\lambda}\right]$,so dass auch eine Darstellung mit der logarithmischen Ableitung von $P_0(z,1)$ möglich ist.

Da nach **4.3.2. a)** für $\underline{\lambda > 1}$ $\quad Q_0(z,\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}-z}$ und diese Summe Bestandteil weiterer Reihen aus **7.4.2.** ist, ergeben sich allgemein Querverbindungen zu $Q_0(z,\lambda)$.

7.4.4. Einige Beispiele

Unter Verwendung der Identität $\frac{q^m}{1-q} = \frac{1}{1-q} - 1 - q - q^2 - \ldots - q^{m-1}$, $q \neq 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

findet man mit $q = \frac{z}{n^{\lambda}}$

(*) $$\frac{1}{n^{\mu-\lambda}}\cdot\frac{z^m}{n^{\lambda}-z} = \frac{n^{\lambda\cdot m}}{n^{\mu}}\cdot\frac{q^m}{1-q} = \frac{1}{n^{\mu-\lambda\cdot m}}\cdot\left[\frac{n^{\lambda}}{n^{\lambda}-z} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k}}\right].$$

1) Nach Summation über n für $\mu - \lambda = \lambda \cdot m$ erhält man aus (*)

(40) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda \cdot m}} \cdot \frac{z^m}{n^{\lambda} - z} = -Q_0(z,\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \zeta(\lambda \cdot (k+1)) \cdot z^k \qquad z \neq n^{\lambda}, \ \lambda > 1, \ m = 1,2,\ldots$$

(40a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2 \cdot m}} \cdot \frac{z^m}{n^2 - z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{\pi}{\sqrt{z}} \cdot cot\left(\pi \cdot \sqrt{z}\right)\right] - \sum_{k=0}^{m-1} \zeta(2 \cdot (k+1)) \cdot z^k$$

$$z \neq n^{\lambda}, \ \lambda = 2, \ m = 1,2,\ldots$$

(40b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \cdot \frac{z^m}{n - z} = -Q_0(z,1) - \sum_{k=1}^{m-1} \zeta(k+1) \cdot z^k = -\psi(1-z) - \gamma - \sum_{k=1}^{m-1} \zeta(k+1) \cdot z^k,$$

$$z \neq n, \ \lambda = 1, \ m = 2,3,\ldots \ .$$

Mit ausgewählten Werten für λ, m, z entstehen die speziellen Summenformeln:

$\lambda = 2, \ m = 1, \ z = \frac{1}{4}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \left(4n^2 - 1\right)} = 2 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

$\lambda = 2, \ m = 1, \ z = \frac{1}{16}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 \cdot \left(16n^2 - 1\right)} = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{24}$

$\lambda = 1, \ m = 2, \ z = \frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot n^2 \cdot (2n-1)} = ln(2) - \frac{\pi^2}{24}.$ (*Vgl.* **4.3.3.** 2))

$\lambda = 1, \ m = 3, \ z = \frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot n^3 \cdot (2n-1)} = ln(2) - \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{8} \cdot \zeta(3)$

$\lambda = 1, \ m = 3, \ z = -\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot n^3 \cdot (2n+1)} = 1 - ln(2) - \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \cdot \zeta(3).$ (*Vgl.* **4.3.3.** 4))

Anmerkungen

1) Die Formeln folgen auch aus der Partialbruchzerlegung der Summanden.
So sind zum Beispiel für die dritte bzw. vierte Formel folgende Zerlegungen geeignet:

$$\frac{1}{4 \cdot n^2 \cdot (2n-1)} = \frac{1}{2 \cdot n - 1} - \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{4 \cdot n^2} \quad bzw. \quad \frac{1}{4 \cdot n^2 \cdot (2n-1)} = \frac{1}{8 \cdot n^3 \cdot (2n-1)} + \frac{1}{8 \cdot n^3}.$$

2) Subtrahiert man die 5. von der 4. Formel und beachtet $\displaystyle\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{4n^2 - 1}$,

so ergibt sich die Entwicklung $$\zeta(3) = 8 \cdot ln(2) - 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cdot \left(4n^2 - 1\right)}.$$

Mit 3 Summanden wird eine Genauigkeit erreicht, wie mit 35 in $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Bei **Koecher** *S. 51f findet man numerisch weit effektivere Formeln für* $\zeta(3)$.

2) Setzt man in **(40a)** $z := z^2$ bzw. $z := (-1) \cdot z^2$, so gilt für $m = 1, 2, \ldots$

(40c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\cdot m}} \cdot \frac{z^{2\cdot m}}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2\cdot z^2}\left[1 - \pi z \cdot cot(\pi z)\right] - \sum_{k=0}^{m-1} \zeta(2(k+1)) \cdot z^{2\cdot k} \qquad (z \neq \pm n)$$

(40d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n^{2\cdot m}} \cdot \frac{z^{2\cdot m}}{n^2 + z^2} = \frac{1}{2\cdot z^2}\left[\pi z \cdot coth(\pi z) - 1\right] - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \zeta(2(k+1)) \cdot z^{2\cdot k} \quad (z \neq \pm i\, n).$$

Einige spezielle Summenformeln:

Aus **(40c)** und **(40d)** erhält man für $m = 1$ und $m = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2\cdot z^4} \cdot \left[-\frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot cot(\pi\, z) + 1\right] \qquad (z \neq \pm n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2\cdot z^6} \cdot \left[-\frac{\pi^4}{45} \cdot z^4 - \frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot cot(\pi z) + 1\right] \qquad (z \neq \pm n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{1}{2\cdot z^4}\left[\frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot coth(\pi\, z) + 1\right] \qquad (z \neq \pm i\, n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{1}{2\cdot z^6}\left[\frac{\pi^4}{45} \cdot z^4 - \frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 + \pi \cdot z \cdot coth(\pi z) - 1\right] \qquad (z \neq \pm i\, n)$$

Anmerkung: Für reelle $z = x > 1$ *kann der Faktor* $coth(\pi \cdot x) \approx 1$ *vernachlässigt werden.*
Vgl. **Apelblat** *S. 245/246 .*

Setzt man in den beiden ersten Formeln $z = k + 1/2$ bzw. $z = k + 1/4$, $\underline{k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$, so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2n)^2 - (2k+1)^2} = \frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2n)^2 - (2k+1)^2} = \frac{8}{(2k+1)^4} - \frac{2\cdot\pi^2}{3\cdot(2k+1)^2} - \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(4k+1)^2}{(4n)^2 - (4k+1)^2} = \frac{8}{(4k+1)^2} - \frac{2\cdot\pi}{4k+1} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(4k+1)^2}{(4n)^2 - (4k+1)^2} = \frac{128}{(4k+1)^4} - \frac{32\cdot\pi}{(4k+1)^3} - \frac{8\cdot\pi^2}{3\cdot(4k+1)^2} - \frac{\pi^4}{90}.$$

7.5. Partialsumme und Restglied einer Bildfunktion

7.5.1. Beispiel

Löst man die Beziehung **(40)** aus **7.4.4.** nach der Bildfunktion $-Q_0(z,\lambda)$ auf, so entsteht eine Darstellung der Bildfunktion mittels Partialsumme und Restglied

(40*) $$-Q_0(z,\lambda)=\sum_{k=0}^{m-1}\zeta(\lambda\cdot(k+1))\cdot z^k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot m}}\cdot\frac{z^m}{n^\lambda-z}=P_m(z)+R_m(z)$$

$$z\neq n^\lambda,\quad \lambda>1\ ,\ m=1,2,...$$

Die Bildfunktion ist durch die Potenzreihe $P(z)=\lim\limits_{m\to\infty}P_m(z)$ für diejenigen z darstellbar, für die das Restglied $R_m(z)\to 0$ geht.

Für $\lambda>1$ und $|z|<1$ gilt $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot m}}\cdot\frac{z^m}{n^\lambda-z}\right|<\frac{|z|^m}{|1-z|}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot m}}=\frac{|z|^m}{|1-z|}\cdot\zeta(\lambda\cdot m)\to 0$,
denn $\zeta(\lambda\cdot m)\to 1$ für festes λ.

Also gilt (in Ergänzung zu den Reihen aus **4.4.2.**)

(40e) $$\sum_{k=0}^{\infty}\zeta(\lambda\cdot(k+1))\cdot z^k=\zeta(\lambda)+\zeta(2\lambda)\cdot z+\zeta(3\lambda)\cdot z^2+..=-Q_0(z,\lambda)\qquad \lambda>1,\ |z|<1.$$

7.5.2. Ausblick

Hier deutet sich ein Weg an, zu einer Originalreihe $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cdot z^k$ die zugehörige Bildfunktion $F_{\lambda,\mu}(z)=\mathbf{Z}_{\lambda,\mu}\{\,f(z)\,\}$ zu ermitteln, wenn es gelingt, für eine Partialsumme $P_m(z)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot a_k\cdot z^k$ eine Summenformel $P_m(z)=F_{\lambda,\mu}(z)+R_m(z)$ aufzustellen mit $\lim\limits_{m\to\infty}R_m(z)=0$.

Im obigen Beispiel wurde dafür auf die entsprechende Darstellung der Originalfunktion $p_m(z)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}a_k\cdot z^k=f(z)+r_m(z),\ \ r_m(z)\to 0$, der prinzipielle Ansatz **3.1.** angewendet!

Denn der Ansatz **7.4.4.** hat (für $z=q$) genau diese Form: $\sum\limits_{k=1}^{m-1}z^k=\frac{z}{1-z}+\frac{-z^m}{1-z}=f(z)+r(z)$.

Inwiefern auch der differentielle Zusammenhang $F_{\lambda,\mu}^{(k)}(0)=\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot f^{(k)}(0)$ zwischen den entsprechenden Taylorkoeffizienten (einschließlich der Restglieder!) weitere Einsichten bringt, wäre zu untersuchen.

7.5.3. Ein weiteres Beispiel; Anmerkung zu den Bernoullischen Zahlen

Die Entwicklung **(40d)** in **7.4.4.** hat nach Multiplikation mit z^2 die Form

$$P_m(z)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k}=\frac{1}{2}(\pi\cdot z\cdot coth(\pi z)-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{n^{2m}}\cdot\frac{z^{2m+2}}{n^2+z^2}=F(z)+R_m(z)$$

mit der Restgliedabschätzung für $|z|<1,\, m\to\infty$

$$|R_m(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\cdot\frac{|z|^{2m+2}}{|n^2+z^2|}<\frac{|z|^{2m+2}}{|1+z^2|}\cdot\zeta(2m)\le\frac{|z|^{2m+2}}{|1+z^2|}\cdot\zeta(2)\to 0\ .$$

Also gilt $\underline{F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k}=\frac{1}{2}(\pi\cdot z\cdot coth(\pi z)-1)}$.

Das ist die in **4.4.2.** aufgestellte (und auch für $z=\pm1$ gültige) Bildreihe **(6)** !

<u>*Anmerkung*</u>

Mit der Substitution $z:=\frac{u}{2\pi}$ *erhält* **(6)** *die Form*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\cdot u^{2k}=\frac{u}{2}\cdot coth\left(\frac{u}{2}\right)-1=\frac{u}{2}\cdot\left[\frac{2}{e^u-1}+1\right]-1=\frac{u}{e^u-1}+\frac{u}{2}-1\quad bzw.$$

$$g(u):=\frac{u}{e^u-1}=1-\frac{1}{2}\cdot u+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\cdot u^{2k}=1-\frac{1}{2}\cdot u+\frac{2\cdot\zeta(2)}{(2\pi)^2}\cdot u^2-\frac{2\cdot\zeta(4)}{(2\pi)^4}\cdot u^4+-...$$

Laut Definition ist $g(u)$ *die erzeugende Funktion der Bernoullischen Zahlen*

$$g(u):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\cdot u^k=B_0+B_1\cdot u+\frac{B_2}{2!}\cdot u^2+\frac{B_3}{3!}\cdot u^3+\frac{B_4}{4!}\cdot u^4+...\ .$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Beziehungen

$$B_0=1\ ,\ B_1=-\frac{1}{2}\ ,\ B_{2k+1}=0\qquad und\qquad \underline{\frac{B_{2k}}{(2k)!}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{2\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}}\ .$$

Da die B_k *aus dem Produkt der Potenzreihen* $g(u)\cdot\frac{1}{g(u)}=1$ *rekursiv (durch rationale Operationen) ermittelt werden können, sind die* $\zeta(2k)$ *bekannt. (EULER.)*

Literatur und Internetverweise

Abramowitz / Stegun	*Pocketbook of Mathematical Functions*	H.Deutsch, Frankfurt 1984
Apelblat	*Tables of Integrals and Series*	H.Deutsch, Frankfurt 1996
Dreszer	*Mathematik-Handbuch*	Fachbuchverlag, Leipzig 1975
Finch	*Mathematical Constants*	Cambridge Univ.Press, NY 2003
Gradstein / Ryshik	*Summen-, Produkt- und Integraltafeln*	H.Deutsch, Frankfurt 1981
Jahnke / Emde	*Tafeln höherer Funktionen*	Teubner, Leipzig 1948
Weisstein	*Concise Encyclopedia of Mathematics*	CRC Press, N.York 1999
Günter / Kusmin	*Aufgabensammlung zur höheren Mathematik, Bd. 1+ 2*	Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1957
Pólya / Szegö	*Aufgaben und Lehrsätze aus derAnalysis I+II*	Springer, Berlin 1925
Borwein / Borwein	*Pi and the AGM*	Wiley, N. York 1998 (pb.)
Brüdern	*Einführung in die analytische Zahlentheorie*	Springer, Berlin u.a. 1991
Edwards	*Riemann's Zeta Function*	Dover Public., N.York 2001 (Academic Press, N.Y.1974)
Fichtenholz	*Differential- und Integralrechnung* II	Dt. Verlag d. W., Berlin 1971
Freitag / Busam	*Funktionentheorie*	Springer, Berlin u.a. 1993
Knopp	*Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*	Springer, Berlin 1947
Koecher	*Klassische elementare Analysis*	Birkhäuser, Basel 1987
Krätzel	*Analytische Funktionen in der Zahlentheorie*	Teubner, Stuttgart u.a. 2000
Landau	*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen , 2 Bd.* (1907)	Chelsea Publishing Company N. York 1974 (in 1 Bd.)
Nörlund	*Differenzenrechnung*	Springer, Berlin 1924
Prachar	*Primzahlverteilung*	Springer, Berlin u.a. 1957
Remmert /Schumacher	*Funktionentheorie 1 (5. Aufl.)*	Springer, Berlin u.a. 2002
Remmert	*Funktionentheorie 2 (2. Aufl.)*	Springer, Berlin u.a. 1995
Riemann	*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.*	Monatsberichte der Berliner Akademie, Nov. 1859
Whittaker / Watson	*A Course of Modern Analysis (4. ed. 1927)*	Cambridge University Press N. York 1962
Flajolet/Vardi	*Zeta Functions Expansion of Classical Constants*	• http://pauillac.inria.fr/algo/flajolet/Publications/landau.ps
Sloane	*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*	• www.research.att.com/~njas
Wolfram Research	*Riemanns u. Hurwitz´s Zetafunktion* (div. LINKS)	• http://functions.wolfram.com • mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html HurwitzZetaFunction.html