

Gerhard Strey

Primzahlen und die Riemannsche Zetafunktion

Ausarbeitung mit Mathcad 2000

Peter Grobstich in Freundschaft

Die Riemannsche Zetafunktion (0)

Verwendete Literatur

Bernhard Riemann

"Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse."

[Monatsberichte der Berliner Akademie, November **1859**]

Preliminary Version: December 1998 by *D. R. Wilkins*

Grundlage der Ausarbeitung.

Monographien und Lehrbücher

Edmund Landau

"Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen." 2 Bände **1909**

Third (corrected) edition, two volumes in one (with an appendix) 1974 New York

Umfassende Darstellung der analytischen Primzahltheorie bis 1909 mit einer historischen Übersicht über die Entwicklung des Primzahlproblems.

Karl Prachar

"Primzahlverteilung" Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg **1957**

Umfassende Monographie. "Gelbe Reihe" Band XCI

Ernst Trost

"Primzahlen" Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart Zweite Auflage **1968**

Reihe "Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus." Bietet viel auf 100 Seiten.

H. M. Edwards

"Riemann's Zeta Function" Academic Press **1974** [Dover edition 2001]

Diese Monographie ist die wichtigste Quelle für das Thema!

Peter Bundschuh

"Einführung in die Zahlentheorie" Springer-Lehrbuch Berlin-Heidelberg 2. Auflage **1991**

Eberhard Freitag, Rolf Busam

"Funktionentheorie" Springer-Lehrbuch Berlin-Heidelberg **1993**

Darstellungen zur mathematischen Ideengeschichte, zu Lösungen und Problemen

Die Auswahl bietet für mathematisch Interessierte auf verständlichem Niveau faszinierende Einblicke in die (Prim-) Zahlentheorie und Riemanns Ideen.

Don Zagier

"Die ersten 50 Millionen Primzahlen" **1981**

In "Mathematische Miniaturen 1: Lebendige Zahlen" Birkhäuser-Verlag Basel

Paulo Ribenboim

"Die Welt der Primzahlen. Geheimnisse und Rekorde" Springer-Verlag Berlin-H. **2006**

Julian Havil

"Gamma. Eulers Konstante, Primzahlstränge und die Riemannsche Vermutung"

Springer-Verlag Berlin-Heidelberg **2007**

Peter Grobstich

"Die Nullstellen der Zeta-Funktion und die Verteilung der Primzahlen"

Computer-Algebra-Symposium Konstanz **2007** (Mit Mathcad 12)

Nullstellensuchprogramm

Sebastian Wedeniwski

"Results connected with the first 100 billion zeros of the Riemann zeta function" **2002**

www.zetagrid.net

Die Riemannsche Zetafunktion (1)

Die Zetafunktion $\zeta(s)$ mit $s = \sigma + i \cdot t$ ist in Mathcad über den Symbolprozessor aufrufbar:

Zeta(s) → ■

Beispiele: $\text{Zeta}(-2) \rightarrow 0$ $\text{Zeta}(2) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2$ $\text{Zeta}(2 + 2 \cdot i) \text{ gleit}, 3 \rightarrow .867 - .275 \cdot i$

1. Definition

$$\zeta_0(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für reelle } s > 1$$

Beispiele: $\zeta_0(3) \rightarrow \text{Zeta}(3) \text{ gleit}, 4 \rightarrow 1.202$ $\zeta_0(2) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2$

$\zeta(s)$ ist die analytische Fortsetzung von $\zeta_0(s)$ und auf der gesamten komplexen Ebene holomorph mit Ausnahme des einfachen Pols $s = 1$.

2. Weitere Darstellungen

a) $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right)$ für reelle s , $0 < s < 1$

b) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $1 < \sigma$ c) $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^{\infty} \frac{z - \text{floor}(z)}{z^{s+1}} dz$ für $0 < \sigma, s \neq 1$

d) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{(2 \cdot n)!} \cdot \frac{\Gamma(s+2 \cdot n-1)}{\Gamma(s)} + R_m$ für $-2 \cdot m < \sigma, s \neq 1$

(Euler-MacLaurin)

e) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{N^{-s}}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{(2 \cdot n)!} \cdot \frac{\Gamma(s+2 \cdot n-1)}{\Gamma(s)} \cdot N^{1-2 \cdot n-s} + R_m$
für $-2 \cdot m < \sigma, s \neq 1$ (Edwards)

Bernoulli-Zahlen: Binomialkoeffizient

$$\text{bin}(m, n) := \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1-n)}$$

$$B_0 := 1 \quad j := 1..16$$

$$B_j := \frac{-1}{\text{bin}(j+1, j)} \cdot \sum_{k=0}^{j-1} \text{bin}(j+1, k) \cdot B_k$$

$$B^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{5}{66} & 0 & -\frac{691}{2730} & 0 & \frac{7}{6} & 0 & -\frac{3617}{510} \end{pmatrix}$$

3. Näherungsformel (nach Formel Edwards)

$$Z(s, N, m) := \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{N^{-s}}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{(2 \cdot n)!} \cdot \prod_{k=0}^{2 \cdot n-2} (s+k) \cdot N^{1-2 \cdot n-s} \quad \sigma > -2 \cdot m$$

Beispiele: $N := 20$ $m := 5$ $\zeta(s) := Z(s, N, m)$

$$\zeta(3) = 1.2020569$$

$$\text{Zeta}(3) \text{ gleit, } 8 \rightarrow 1.2020569$$

$$\zeta(-2.1) = 0.0027295$$

$$\text{Zeta}(-2.1) \text{ gleit, } 8 \rightarrow 2.7294998 \cdot 10^{-3}$$

$$\zeta(0.1) = -0.60303752$$

$$\text{Zeta}(0.1) \text{ gleit, } 8 \rightarrow -.60303752$$

$$\zeta(-2) = 0$$

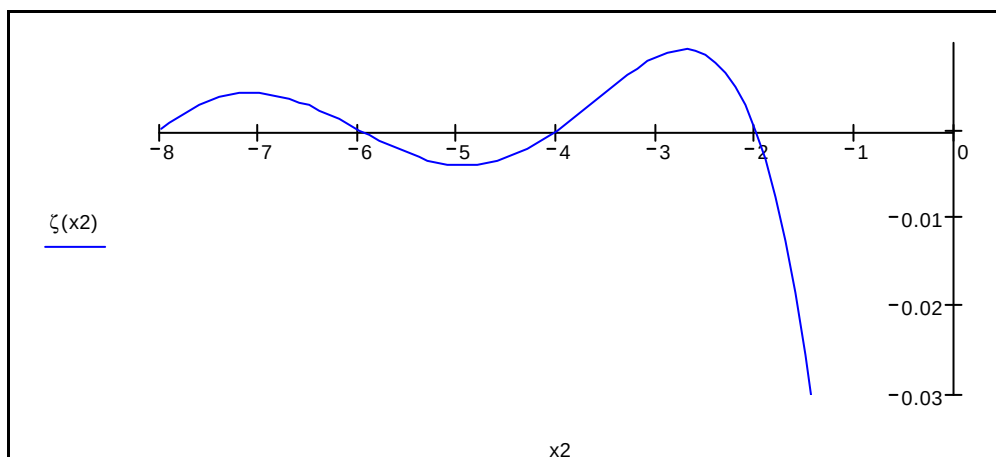
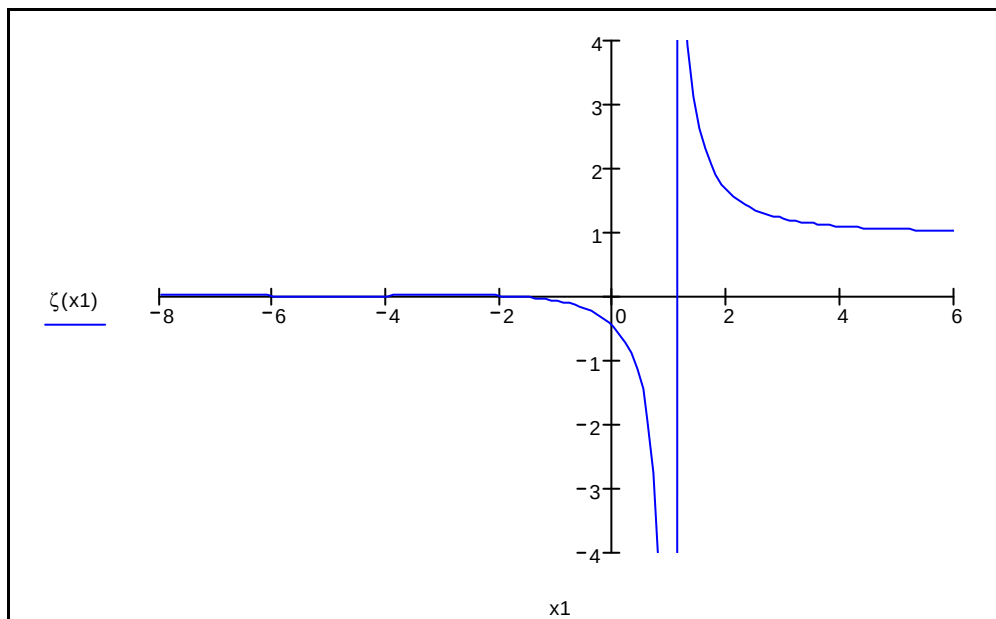
$$\text{Zeta}(-2) \text{ gleit, } 8 \rightarrow 0$$

$$\zeta(0.5 + 2 \cdot i) = 0.4405 - 0.3116i$$

$$\text{Zeta}(0.5 + 2 \cdot i) \text{ gleit, } 4 \rightarrow .4405 - .3116 \cdot i$$

4. Bild der reellen Zetafunktion

$x1 := -8, -7.9 \dots 6$ $x2 := -8, -7.9 \dots 0$

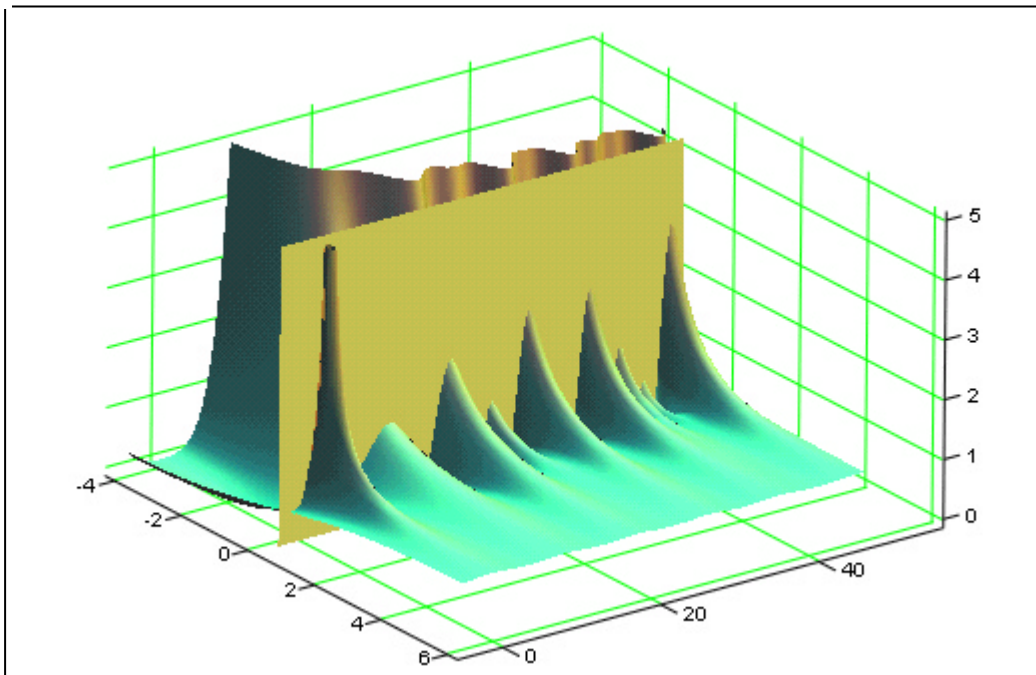


5. Betragsfläche der komplexen Zetafunktion

a) Schnittlinie längs der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$

$$j := 0..100 \quad k := 0..100 \quad \sigma_j := 0.101 \cdot j - 4 \quad t_k := 0.51 \cdot k - 4 \quad u_j := 0.5 \quad v_k := t_k$$

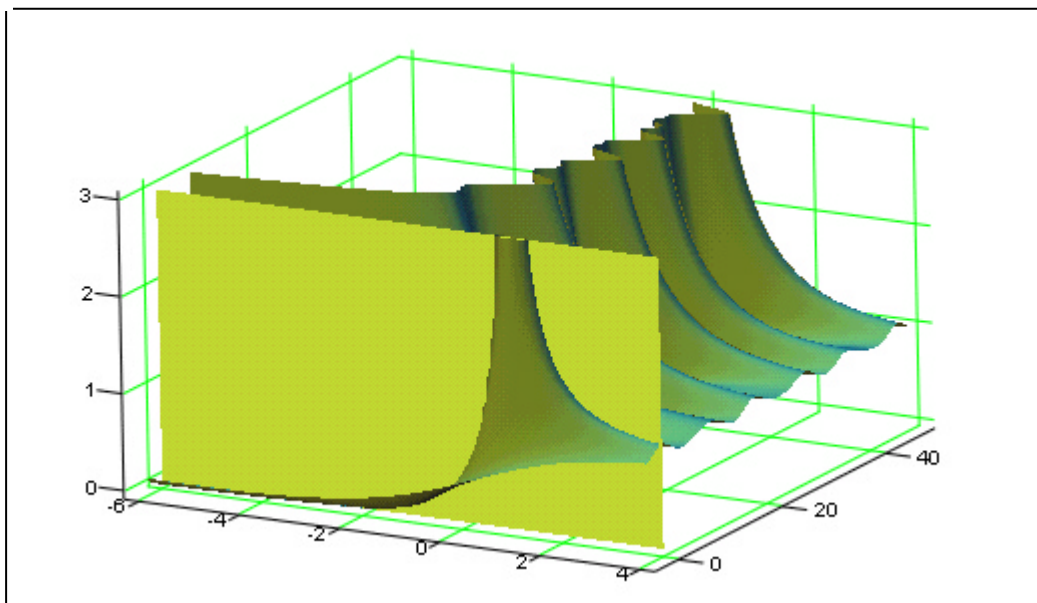
$$X_{j,k} := \sigma_j \quad Y_{j,k} := t_k \quad Z_{j,k} := |\zeta(\sigma_j + t_k \cdot i)| \quad U_{j,k} := u_j \quad V_{j,k} := v_k \quad W_{j,k} := \frac{j}{15}$$



b) Schnittlinie längs der Geraden $t = 0$

$$j := 0..100 \quad k := 0..100 \quad \sigma_j := 0.101 \cdot j - 6 \quad t_k := 0.51 \cdot k - 3 \quad u_j := \sigma_j \quad v_k := 0$$

$$X_{j,k} := \sigma_j \quad Y_{j,k} := t_k \quad Z_{j,k} := |\zeta(\sigma_j + t_k \cdot i)| \quad U_{j,k} := u_j \quad V_{j,k} := v_k \quad W_{j,k} := \frac{k}{15}$$



Die Riemannsche Zetafunktion (2)

► Riemann (1)

6. Weitere mit der Zetafunktion verwandten Funktionen

Funktionalgleichung $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{1-s}{2}} \cdot \zeta(1-s)$ für alle $s \neq 1$.

Einführung der ξ - Funktion $\xi(s) := \frac{s \cdot (s-1)}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \zeta(s)$

Es gilt $\xi(s) = \xi(1-s)$ Beispiele: $\xi(1.5) = 0.51$ $\xi(-0.5) = 0.51$

$\xi(-2) = \blacksquare$ aber dafür $\xi(3) = 0.57$

Es gilt $\xi\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right) = \xi\left(\frac{1}{2} - t \cdot i\right) = \overline{\xi\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right)} = \xi\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right)$ d.h. reell !!

Einführung der reellen Ξ - Funktion $\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right)$ $\Xi(-t) = \Xi(t)$ (Landau)

Abspaltung eines nullstellenfreien ("dämpfenden") Faktors $f(t) < 0$ (siehe Edwards):

$$\Xi(t) = f(t) \cdot e^{\theta(t) \cdot i} \cdot \zeta\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right) = f(t) \cdot Z(t)$$

mit der Näherung $\theta(t) := \frac{t}{2} \cdot \ln\left(\frac{t}{2 \cdot \pi}\right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48 \cdot t}$ für $t > 1$.

Einführung der reellen Z - Funktion $Z(t) := e^{\theta(t) \cdot i} \cdot \zeta\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right)$ (Riemann-Siegel)

7. Reelle Nullstellen der Zetafunktion

Die (trivialen) reellen Nullstellen sind $s = -2 \cdot n = -2, -4, -6, \dots$

In der Funktionalgleichung ist die rechte Seite für $\sigma > 1$ ungleich Null (vgl. 2 b) und Γ).

Also ist $\zeta(s) = 0$ an den Polstellen von $\Gamma(s/2)$.

8. Nichttriviale Nullstellen der Zetafunktion

Bewiesen ist: Alle nichttrivialen Nullstellen liegen im Streifen $0 < \sigma < 1$!

Sie liegen symmetrisch zur x-Achse und zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

Riemansche Vermutung:

Alle nichttrivialen Nullstellen liegen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$

9. Berechnung nichttrivialer Nullstellen

Für die Nullstellen $\rho_k = \frac{1}{2} + t_k \cdot i$ gilt: $\zeta(\rho_k) = 0 \Leftrightarrow \xi(\rho_k) = 0 \Leftrightarrow \Xi(t_k) = 0 \Leftrightarrow Z(t_k) = 0$

Es genügt also wegen $\Xi(-t) = \Xi(t)$, die Nullstellen von $Z(t > 0)$ zu ermitteln.

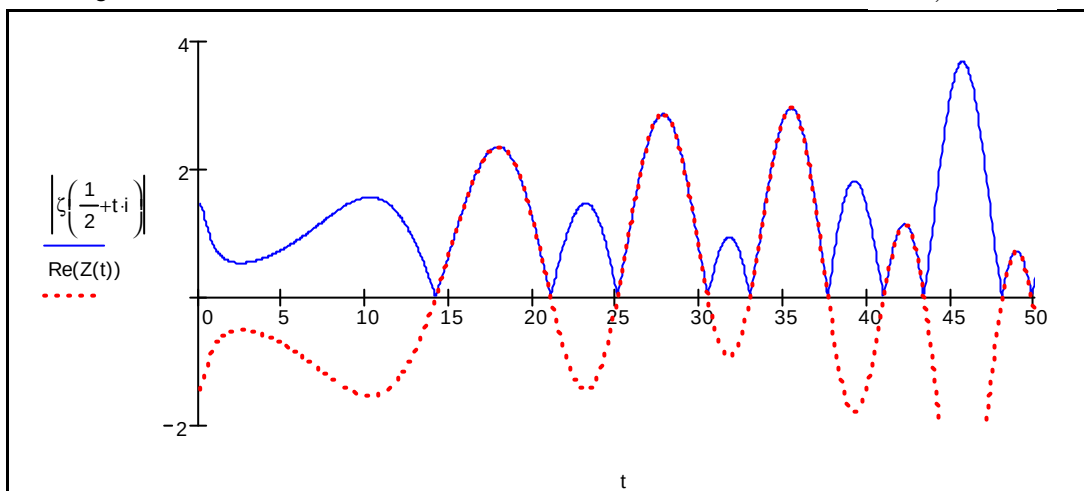
Beispiel:

Näherung 1	$t_1 := 14.0$	$\text{wurzel}(Z(t_1), t_1) = 14.13470982$
Näherung 2	$t_1 := 14.12606852$	$\text{wurzel}(Z(t_1), t_1) = 14.13472125$
Näherung 3	$t_1 := 14.13475255$	$\text{wurzel}(Z(t_1), t_1) = 14.13472517$

$$\underline{\underline{t_1 \approx t_n := 14.134725}} \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + t_n \cdot i\right) = 0.00 - 0.00i$$

Vergleichende Grafik:

$t := 0, 0.05 \dots 50$



Zur Vermeidung von komplexen Restfehlern wird $\text{Re}(Z)$ aufgetragen.

Es gilt $|Z(t)| = \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + t \cdot i\right) \right|$ Die Nullstellen können durch Vorzeichenwechsel von $Z(t)$ lokalisiert werden.

10. Suchprogramm und Tabelle der Vorzeichenwechsel von $Z(t)$

$N := 500$

```

ZW(a, b, h) :=
  k ← 1
  t ← a
  while t ≤ b
    z1 ← Re(Z(t))
    z2 ← Re(Z(t + h))
    if z1 · z2 < 0
      zwk,0 ← t
      zwk,1 ← t + h
      k ← k + 1
    t ← t + h
  zw
  
```

Beispiel:

$\text{ZW}(10, 50, 0.01) =$

	0	1
0	0.00	0.00
1	14.13	14.14
2	21.02	21.03
3	25.01	25.02
4	30.42	30.43
5	32.93	32.94
6	37.58	37.59
7	40.91	40.92
8	43.32	43.33
9	48.00	48.01

11. Tabelle der ersten 300 nichttrivialen Nullstellen

Berechne $ZW(10, 542, 0.01)$, Rechenzeit ca. 20 min.

Wähle als Näherungen die untere Schranke $t_k = ZW_{k,0}$.

Sicherheitsdatei anlegen: Zetanullstellen.txt. Kopiere die Daten in eine Matrix.

Matrix TW der t-Werte der nichttrivialen Nullstellen $\rho_k = \frac{1}{2} + t_k \cdot i$

TW :=	(	14.13	103.72	165.53	220.71	271.49	321.16	367.99	413.26	457.90	501.60	)
		21.02	105.44	167.18	221.43	273.45	322.14	368.96	415.01	459.51	502.27	
		25.01	107.16	169.09	224.00	275.58	323.46	370.05	415.45	460.08	504.49	
		30.42	111.02	169.91	224.98	276.45	324.86	373.06	418.38	462.06	505.41	
		32.93	111.87	173.41	227.42	278.25	327.44	373.86	419.86	464.05	506.46	
		37.58	114.32	174.75	229.33	279.22	329.03	375.82	420.64	465.67	508.80	
		40.91	116.22	176.44	231.25	282.46	329.95	376.32	422.07	466.57	510.26	
		43.32	118.79	178.37	231.98	283.21	331.47	378.43	423.71	467.43	511.56	
		48.00	121.37	179.91	233.69	284.83	333.64	379.87	425.06	469.53	512.62	
		49.77	122.94	182.20	236.52	286.66	334.21	381.48	427.20	470.77	513.66	
		52.97	124.25	184.87	237.76	287.91	336.84	383.44	428.12	472.79	515.43	
		56.44	127.51	185.59	239.55	289.57	338.33	384.95	430.32	473.83	517.58	
		59.34	129.57	187.22	241.04	291.84	339.85	385.86	431.30	475.60	518.23	
		60.83	131.08	189.41	242.82	293.55	341.04	387.22	432.13	476.76	520.10	
		65.11	133.49	192.02	244.07	294.96	342.05	388.84	433.88	478.07	521.52	
		67.07	134.75	193.07	247.13	295.57	344.66	391.45	436.16	478.94	522.45	
		69.54	138.11	195.26	248.10	297.97	346.34	392.24	437.58	481.83	523.96	
		72.06	139.73	196.87	249.57	299.84	347.27	393.42	438.62	482.83	525.07	
		75.70	141.12	198.01	251.01	301.64	349.31	395.58	439.91	483.85	527.90	
		77.14	143.11	201.26	253.06	302.69	350.40	396.38	441.68	485.53	528.40	
		79.33	146.00	202.49	255.30	304.86	351.87	397.91	442.90	486.52	529.80	
		82.91	147.42	204.18	256.38	305.72	353.48	399.98	444.31	488.38	530.86	
		84.73	150.05	205.39	258.61	307.21	356.01	401.83	446.86	489.66	532.68	
		87.42	150.92	207.90	259.87	310.10	357.15	402.86	447.44	491.39	533.77	
		88.80	153.02	209.57	260.80	311.16	357.95	404.23	449.14	493.31	535.66	
		92.49	156.11	211.69	263.57	312.42	359.74	405.13	450.12	493.95	537.06	
		94.65	157.59	213.34	265.55	313.98	361.28	407.58	451.40	495.35	538.42	
		95.87	158.84	214.54	266.61	315.47	363.33	408.94	453.98	496.42	540.21	
		98.83	161.18	216.16	267.92	317.73	364.73	410.51	454.97	498.58	540.63	
		101.31	163.03	219.06	269.97	318.85	366.21	411.97	456.32	500.30	541.84	)

$k := 0..299$ $t_{k+1} := TW_{\text{mod}(k,30), \text{floor}\left(\frac{k}{30}\right)}$ $t_1 = 14.13$ $t_{300} = 541.84$

Die Riemannsche Zetafunktion (3)

► Riemann (1,2)

12. Anzahl der Nullstellen r_k im Intervall $0 < T_1 < t < T_2$

Nach dem Residuensatz ergibt sich die Differenz zwischen der Anzahl N der Nullstellen und der Anzahl P der Pole innerhalb der einfach geschlossenen Kurve C aus dem Integral

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_C \frac{\zeta_s(s)}{\zeta(s)} ds \quad \text{mit} \quad \zeta_s(s) := \frac{d}{ds} \zeta(s)$$

Im Folgenden werde die Riemannsche Vermutung als richtig angenommen.

Zur Berechnung der Anzahl der $\rho_k = \sigma + t_k \cdot i$ für $T_1 := 490$, $T_2 := 500$ wähle man z. B. die schmale (polfreie!) Ellipse $r(\varphi)$

$$\text{Mittelpunkt} \quad z := \frac{1}{2} + \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot i \quad \text{Halbachsen} \quad a := \frac{1}{10} \quad b := \frac{T_2 - T_1}{2}$$

$$r(\varphi) := z + a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot i \cdot \sin(\varphi) \quad r_\varphi(\varphi) := \frac{d}{d\varphi} r(\varphi)$$

Dann gilt

$$N := \frac{1}{2\pi \cdot i} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\zeta_s(r(\varphi))}{\zeta(r(\varphi))} \cdot r_\varphi(\varphi) d\varphi \quad N = 6$$

Tabelle 11. liefert die	$t_{264} = 491.39$	$t_{265} = 493.31$	$t_{266} = 493.95$
$N = 6$ Nullstellen	$t_{267} = 495.35$	$t_{268} = 496.42$	$t_{269} = 498.58$

Eine Abschätzung des Integrals (mit dem Rechteck $C: 2, 2 + T \cdot i, -1 + T \cdot i, -1$) liefert die Näherungsformel für $0 < t \leq T$

$$N(T) := \frac{T}{2\pi} \cdot \left(\ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - 1 \right) + \frac{7}{8} \quad \text{mit} \quad N = N(t) + O(\ln(T))$$

(Riemann - v. Mangoldt)

Beispiele: $N(499) - N(490) = 6.3$ $N(t_{300}) = 299.0$

13. Summenformel der Reziproken aller Nullstellen r_k und $\overline{r_k} = 1 - r_k$

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln(N) \right) \text{ gleit, } 8 \rightarrow .57721566 \quad (\text{Eulersche Konstante})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{\overline{\rho_k}} \right) = \frac{1}{2} \gamma + 1 - \ln(2 \cdot \sqrt{\pi}) \quad \frac{1}{2} \cdot \gamma + 1 - \ln(2 \cdot \sqrt{\pi}) = 0.023096$$

Zum Vergleich:

$$\sum_{k=1}^{300} \left[\left(\frac{1}{2} + t_k \cdot i \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} - t_k \cdot i \right)^{-1} \right] = 0.02150$$

Die Riemannsche Zetafunktion (4)

► Riemann (1,2)

14. Tabelle der Primzahlen

Sieb des Eratosthenes

Unterprogramm

```
streichen(a, q) :=
  j ← 0
  for k ∈ 0..länge(a) - 1
    if mod(ak, q) ≠ 0
      bj ← ak
      j ← j + 1
  b
```

Hauptprogramm

```
sieb(N) :=
  for j ∈ 0..N - 2
    aj ← j + 2
  n ← länge(a) - 1
  k ← 1
  b1 ← 2
  while länge(a) > 1
    a ← streichen(a, bk)
    bk+1 ← a0
    k ← k + 1
  b
```

Berechnung der Primzahlen kleiner als 10000

p := sieb(10000)

Anzahl der Primzahlen $n := \text{länge}(\mathbf{p}) - 1$

n = 1229

p_n = 9973

Primzahlen-Tabelle TP , abrollen!

$k := 0..n$ $\text{TP}_{\text{floor}\left(\frac{k}{10}\right), \text{mod}(k, 10)} := \mathbf{p}_k$

TP =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	2	3	5	7	11	13	17	19	23
1	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
2	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
3	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
4	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
5	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
6	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
7	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
8	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
9	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
10	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
11	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
12	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
13	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
14	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
15	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
16	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1009

Beispiele: $\text{TP}_{11,3} = 617$ $\mathbf{p}_{113} = 617$

$\text{TP}_{122,9} = 9973$

15. Zusammenhang zwischen Primzahlen und Zetafunktion (1) : Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{(p_k)^s} \right]^{-1} \quad \text{für } \sigma > 1 \quad (\text{Euler, für reelle } s > 1)$$

$p_k = 2, 3, 5, \dots$ Primzahlenfolge

Dieses Produkt konvergiert äußerst langsam!

Beispiel: $\prod_{k=1}^{1229} \left[1 + \frac{1}{(p_k)^2} \right]^{-1} = 1 \quad \text{Zeta}(2) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi^2 = 2$

16. Anzahl der Primzahlen im Intervall [0 , x]

Anzahlfunktion $\pi(x) = \text{Anzahl}(p, p \leq x)$

Realisierung für $0 \leq x < 10000$

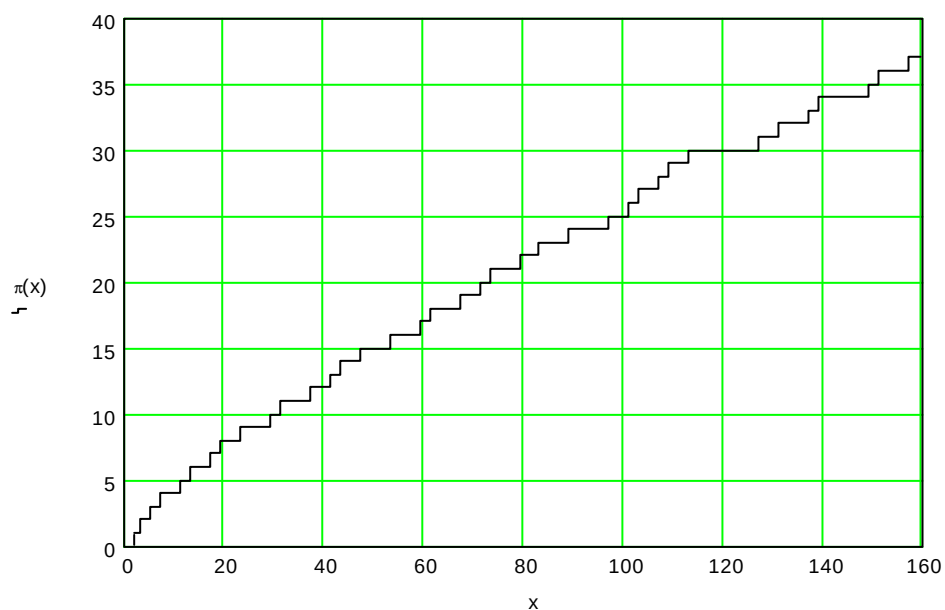
```

π(x) :=
  k ← 0
  while pk+1 ≤ x
    k ← k + 1
    break if k = 1229
  k

```

Beispiele: $\pi(2) = 1 \quad \pi(50.5) = 15 \quad \pi(10000) = 1229 \quad \pi(p_{100}) = 100$

Grafik $x := 0..160$



17. Primzahlsatz und Näherungen für die Anzahlfunktion

Primzahlsatz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$$

(1. Beweise: Hadamard, de la Vallée Poussin)

Primzahlsatz (falls die Riemannsche Vermutung richtig ist))

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)} + O(\sqrt{x} \cdot \ln(x))$$

Näherungsformeln

$$\pi_1(x) := \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\pi_2(x) := \frac{x}{\ln(x) - 1.08366}$$

(Legendre, empirisch, $x \gg 1$)

Integrallogarithmus $\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$ $\pi_3(x) := \text{Li}(x)$ (Gauß)

Vergleichstabelle

n	$\pi(n)$	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$	$\pi_1 - \pi$	$\pi_2 - \pi$	$\pi_3 - \pi$
50	15	13	18	17	-2	3	2
100	25	22	28	29	-3	3	4
500	95	80	97	101	-15	2	6
1000	168	145	172	177	-23	4	9
5000	669	587	673	683	-82	4	14
10000	1229	1086	1231	1245	-143	2	16
50000	5133	4621	5136	5166	-512	3	33
100000	9592	8686	9588	9630	-906	-4	38
500000	41538	38103	41533	41607	-3435	-5	69
1000000	78498	72382	78543	78629	-6116	45	131
5000000	348513	324150	348644	348638	-24363	131	125
10000000	664579	620421	665140	664918	-44158	561	339
100000000	5761455	5428681	5768004	5762207	-332774	6549	752

T =

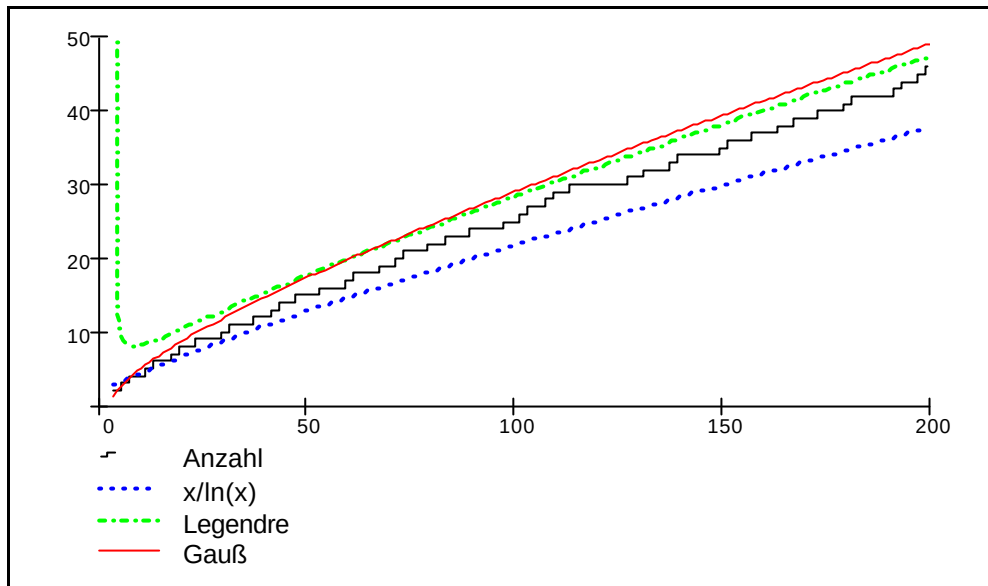
Die (empirisch gewonnene) Näherung von Legendre ist für $n < 10^6$ vortrefflich.

Ab ca. $n = 5 \cdot 10^6$ ist die Gaußsche Näherung den anderen überlegen.

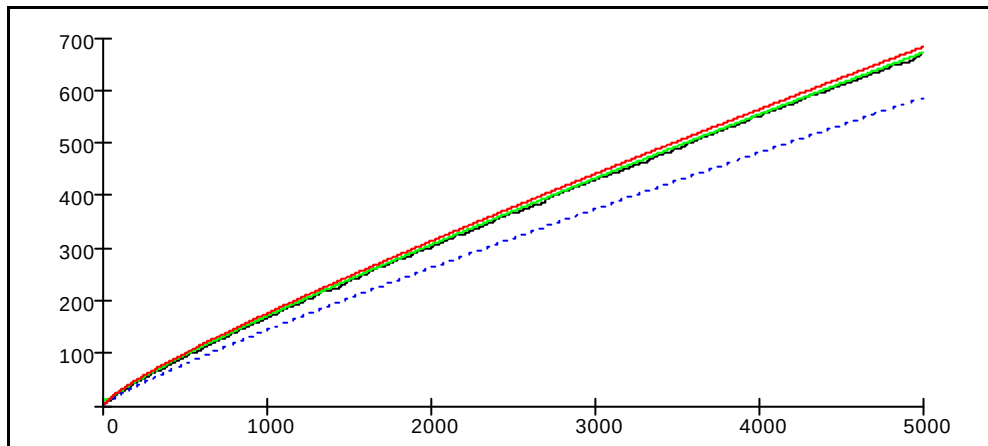
Der Integrallogarithmus spielt auch bei der nachfolgend behandelten (exakten!) Formel von Riemann eine wichtige Rolle.

Grafiken

$x := 3.. 200$



$x := 4.. 5000$



18. Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Nach 17. $\pi_3(x)$ ist in asymptotischer Näherung die relative Häufigkeit der Primzahlen im

Intervall $[2, n]$: $\frac{\pi(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \int_2^n \frac{1}{\ln(t)} dt$, d. h. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ ist die Primzahldichte.

Für $2 \ll \Delta x \ll x$ folgt nach dem Mittelwertsatz $\pi(x + \Delta x) - \pi(x) = \frac{1}{\ln(x + \delta \cdot \Delta x)} \cdot \Delta(x)$

oder genähert $\pi(x + \Delta x) - \pi(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \Delta(x)$.

Beispiel: $x := 1400$ $\Delta x := 200$ $\pi(x + \Delta x) - \pi(x) = 29$ $\frac{\Delta x}{\ln(x)} = 28$

Die Riemannsche Zetafunktion (5)

► Riemann (1,2,4)

19. Zusammenhang zwischen Primzahlen und Zetafunktion (2) : Riemann

Setze
$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \pi(x) + \frac{1}{2} \cdot \pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} \cdot \pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots$$

Diese Summe bricht ab, wenn $\sqrt[n]{x} < 2$, d.h. $n > \ln(x) / \ln(2)$ ist.

Mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel entsteht die Darstellung der Anzahlfunktion:

$$(\#) \quad \pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \cdot J\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = J(x) - \frac{1}{2} \cdot J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3} \cdot J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5} \cdot J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$$

Diese Summe hat ebenfalls nur endlich viele Glieder, mit von x abhängiger Anzahl.

Möbiussche μ - Funktion: $\mu(q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m) = (-1)^m$ für verschiedene Primzahlen q_k
 $\mu(1) = 1$ $\mu(n) = 0$ sonst, d.h. n ist nicht "quadratifrei".

Für alle n mit Primteilern $< p_{50} = 229$ gilt das Programm

$\mu(n) := \begin{cases} a \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 1..50 \\ \quad \begin{cases} a \leftarrow -a & \text{if } \text{mod}[n, (p_k)] = 0 \\ \text{return } 0 & \text{if } \text{mod}[n, (p_k)^2] = 0 \end{cases} \\ a \end{cases}$	$\mu(1) = 1 \quad \mu(2) = -1$ $\mu(3) = -1 \quad \mu(4) = 0$ $\mu(5) = -1 \quad \mu(6) = 1$ $\mu(7) = -1 \quad \mu(8) = 0$
---	--

Beispiel: $x \leq 100$

$$J(x) := \sum_{n=1}^7 \frac{1}{n} \cdot \pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \quad S(x) := \sum_{n=1}^7 \frac{\mu(n)}{n} \cdot J\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$100^{\frac{1}{7}} = 1.93 \quad J(80) = 25.28 \quad S(80) = 22 \quad \pi(80) = 22$$

=====

Es gilt die berühmte Riemannsche Primzahlformel, (1. Beweis: v. Mangoldt):

$$(\#\#) \quad J(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \left(\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{\bar{\rho}}) \right) - \ln(2) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t \cdot (t^2 - 1) \cdot \ln(t)} dt \quad x > 1$$

In der Summe durchläuft ρ alle nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion mit $\text{Im}(\rho) > 0$!

Mit $(\#\#)$, $(\#)$ liegt ein exakter analytischer Ausdruck für die Anzahlfunktion $\pi(x)$ vor!

20. Diskussion der Riemannschen Primzahlformel; Näherungen

1. Gilt die Riemannsche Vermutung, so vereinfachen sich die Summanden in (##) wegen

$$\int \frac{1}{\ln(t)} dt = \int \frac{\rho_k \cdot z^{\rho_k-1}}{\ln(z^{\rho_k})} dz = \int \frac{z^{\rho_k-1}}{\ln(z)} dz \quad \text{und} \quad \rho_k = \frac{1}{2} + t_k \cdot i \quad \overline{\rho_k} = \frac{1}{2} - t_k \cdot i$$

$$\text{wie folgt} \quad \text{Li}(x^{\rho_k}) + \text{Li}(x^{\overline{\rho_k}}) = \int_2^x \frac{z^{-\frac{1}{2}+t_k \cdot i} + z^{-\frac{1}{2}-t_k \cdot i}}{\ln(z)} dz = \int_2^x \frac{2 \cdot \cos(t_k \cdot \ln(z))}{\sqrt{z} \cdot \ln(z)} dz ,$$

$$\text{denn} \quad x^{t_k \cdot i} + x^{-t_k \cdot i} = e^{t_k \cdot \ln(x) \cdot i} + e^{-t_k \cdot \ln(x) \cdot i} = 2 \cdot \cos(t_k \cdot \ln(x)) .$$

2. Für $x > 2$ ist das Integral bedeutungslos.

$$\int_2^\infty \frac{1}{t \cdot (t^2 - 1) \cdot \ln(t)} dt < \int_2^\infty \frac{1}{3 \cdot t^2} dt = \frac{1}{6} \quad \text{z. B.} \quad \int_2^{1000} \frac{1}{t \cdot (t^2 - 1) \cdot \ln(t)} dt = 0.14$$

3. Setze

$$R(x, m) := \sum_{n=1}^m \frac{\mu(n)}{n} \cdot \text{Li}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \quad \text{Riemann-Funktion} \quad R(x) = R(x, \infty)$$

$$P(x, m, N) := \sum_{n=1}^m \frac{\mu(n)}{n} \cdot \sum_{k=1}^N \int_2^{x^{\frac{1}{n}}} \frac{2 \cdot \cos(t_k \cdot \ln(z))}{\sqrt{z} \cdot \ln(z)} dz \quad \text{"Periodenanteil"}$$

Dann gilt die Näherung

$$\pi(x) \approx R(x, m) - P(x, m, N)$$

$$\text{Beispiele:} \quad x := 80 \quad m := \text{floor}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right) + 1 \quad m = 7$$

$$R(x) := R(x, m)$$

$$R(x) = 21.5$$

$$\pi(x) = 22$$

$$N1 := 5$$

$$P1 := P(x, m, N1)$$

$$P1 = -0.27$$

$$R(x) - P1 = 21.8$$

$$N2 := 15$$

$$P2 := P(x, m, N2)$$

$$P2 = -0.1$$

$$R(x) - P2 = 21.6$$

$$N3 := 30$$

$$P3 := P(x, m, N3)$$

$$P3 = -0.32$$

$$R(x) - P3 = 21.9$$

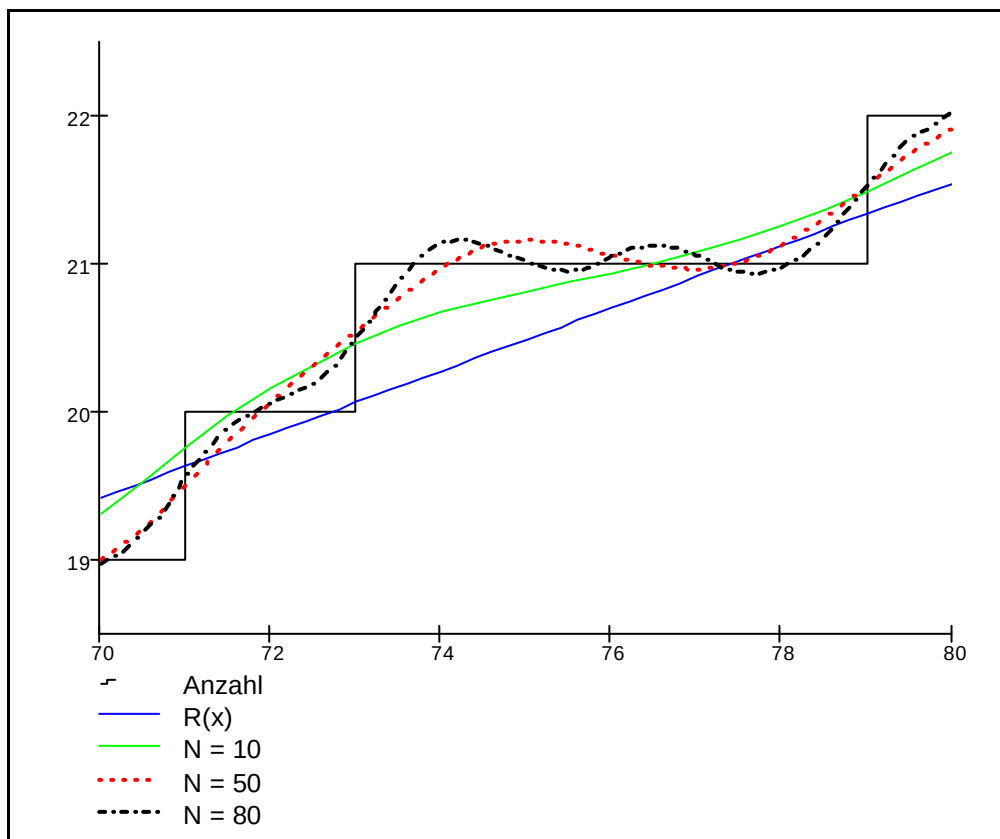
Die Riemannfunktion bietet (auch ohne Periodenanteile) sehr gute Näherungen!

Vergleichstabelle

	n	$\pi(n)$	Li(n)	R(n)	Li - π	R - π
T =	50	15	17	15	2	-0
	100	25	29	26	4	1
	500	95	101	94	6	-1
	1000	168	177	168	9	0
	5000	669	683	669	14	-0
	10000	1229	1245	1227	16	-2
	50000	5133	5166	5134	33	1
	100000	9592	9630	9588	38	-4
	500000	41538	41607	41531	69	-7
	1000000	78498	78629	78529	131	31
	5000000	348513	348638	348450	125	-63
	10000000	664579	664918	664668	339	89
	100000000	5761455	5762207	5761551	752	96

21. Veranschaulichung der Periodenanteile

Näherungsfunktionen $\pi_0(x, N) := R(x) - P(x, m, N)$



Die Approximation der Treppenfunktion erinnert an eine Fourieranalyse!

An der Sprungstelle $x = p$ wird das Sprungmittel $\pi(p) - \frac{1}{2}$ angenähert.

Die Riemannsche Zetafunktion (6)

► Riemann (1,2,4)

22. Noch einmal: Die Riemannsche Primzahlformel

Umformung des Integrals aus der Primzahlformel:

$$f(t) = \frac{1}{t(t^2-1) \cdot \ln(t)} = \frac{1}{t^3 \cdot \ln(t)} \cdot \frac{1}{1-t^{-2}} = \frac{1}{t^3 \cdot \ln(t)} \cdot \left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \dots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^{2 \cdot k+1} \cdot \ln(t)}$$

Setze $u = t^{-2k}$, dann gilt $\int_x^{\infty} \frac{1}{t^{2 \cdot k+1} \cdot \ln(t)} dt = \int_{x^{-2 \cdot k}}^0 \frac{1}{\ln(u)} du$ und

$$\int_x^{\infty} f(t) dt = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{x^{-2 \cdot k}} \frac{1}{\ln(t)} dt = - \sum_{k=1}^{\infty} \text{li}(x^{-2k}) \quad \text{mit} \quad \text{li}(x) := \int_0^x \frac{1}{\ln(t)} dt \quad \text{für} \quad 0 \leq x < 1$$

Das Integral liefert also in $J(x)$ den Anteil der trivialen Nullstellen $s = -2 \cdot k$.

Die Primzahlformel besteht aus drei Anteilen:

$$J(x) = J_P(x) - J_N(x) - J_T(x) \quad x > 1$$

$$J_P(x) = \text{Li}(x^1)$$

Anteil des Pols $s = 1$ der Zetafunktion (Hauptteil)

$$J_N(x) = \sum_{\rho} \left(\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{\bar{\rho}}) \right)$$

Anteil der nichttrivialen Nullstellen $s = \rho, \bar{\rho}$ der Zetafunktion (Periodizitäten),
wahrscheinlich $\rho_k = 0.5 + t_k \cdot i$.

$$J_T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{li}(x^{-2k})$$

Anteil der trivialen Nullstellen $s = -2 \cdot k$ der Zetafunktion, (unerheblich).

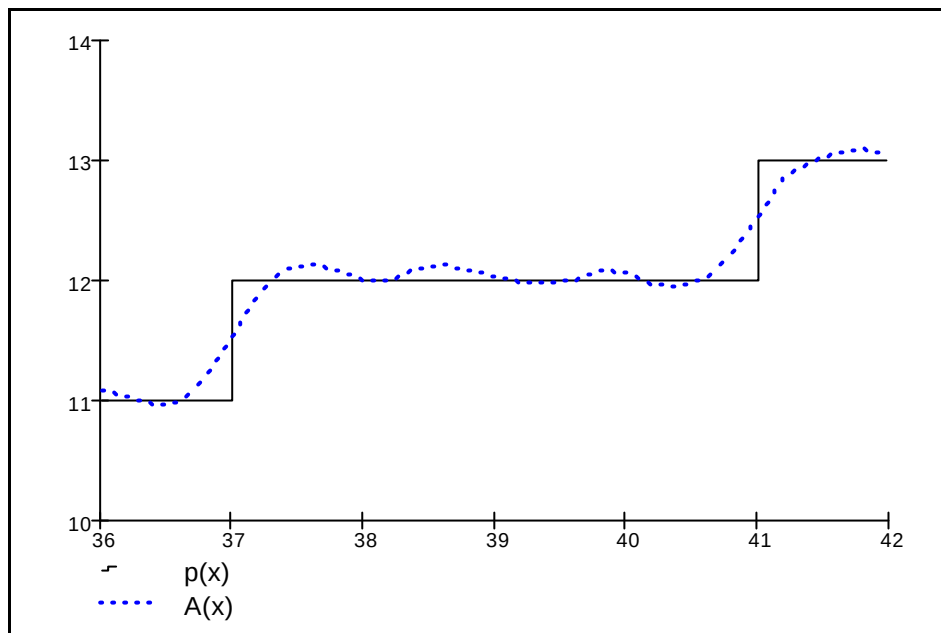
$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \cdot J\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Der konstante Summand $-\ln(2)$ kann in $J(x)$ entfallen, denn er liefert bei der Summierung

wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ (v. Mangoldt) keinen Anteil für $\pi(x)$.

2. Beispiel

$x := 36, 36.2 \dots 42$ $A(x) = A(x, 50, 100, 20)$



"Fourierkomponenten" der k-ten Nullstellenpaare $\rho_k, \overline{\rho_k}$ in der Anteilformel $AN(x, m_0, m_1)$:

$$T(x, m_0, k) := \sum_{n=1}^{m_0} \frac{\mu(n)}{n} \cdot N\left(x^{\frac{1}{n}}, k\right) \quad m_0 := 50$$

