Trigonometrische Produkte und Summen

1. **Ganzrationale Funktionen mit trigonometrischen Nullstellen**
2. **Gewinnung spezieller trigonometrischer Summen und Produkte**
3. **Auswahl spezieller trigonometrischer Summen und Produkte**

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\tan^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\tan^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cdot\tan^2\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\tan^2\left(\frac{5\pi}{7}\right)\cdot\tan^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 7\cdot 7$$

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\tan^2\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 6\cdot 7$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}\cdot 7$$

u.v.a.

1. Ganzrationale Funktionen mit trigonometrischen Nullstellen

Aus dem Satz von MOIVRE werden nachfolgend mehrere trigonometrische Summen gewonnen:

1.1. Tangenssummen.

$$\cos n\alpha + i\cdot\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n = (\cos\alpha)^n\cdot(1+i\cdot x)^n \;,\quad \underline{x := \tan\alpha}.$$

$$\frac{\cos n\alpha + i\cdot\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} = \sum_{j=0}^{n} i^j\cdot\binom{n}{j}\cdot x^j.\quad \underline{m' := \left[\frac{n-1}{2}\right]},\; \underline{r := \frac{1+(-1)^n}{2}},\; \underline{m'' := m' + r},\quad n\ge 3.$$

$$(T1)\quad \underline{\frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \sum_{j=0}^{m''}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j}\cdot x^{2j}}\;,\qquad (T2)\quad \underline{\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^{n-1}\alpha} = \sum_{j=0}^{m'}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j+1}\cdot x^{2j}}\;.$$

1.2. Sinus- und Kosinussummen.

$$\cos n\alpha + i\cdot\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)^n = \sum_{j=0}^{n} i^j\cdot\binom{n}{j}\cdot u^{n-j}\cdot v^j\;,\quad \underline{u := \cos\alpha}\;,\quad \underline{v := \sin\alpha}.$$

$$(C)\quad \underline{\frac{\cos n\alpha}{(\cos\alpha)^{m'+1-m''}} = \sum_{j=0}^{m''}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j}\cdot u^{2(m''-j)}\cdot(1-u^2)^j}\;,$$

$$(S)\quad \underline{\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cdot(\cos\alpha)^{m''-m'}} = \sum_{j=0}^{m'}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j+1}\cdot v^{2j}\cdot(1-v^2)^{m'-j}}\;.\qquad (n = m' + m'' + 1)$$

1.3. Ausgewählte Funktionen von *x*, *u* und *v*.

Bei geeigneter Wahl der Winkel α werden die linken Seiten von *T1*, *T2*, *C* und *S* gleich Null. Die zugehörigen Werte von *x*, *u* und *v* sind damit Nullstellen der rechten Summen.

Wir definieren die ganzrationalen Funktionen

$$\underline{f1(x) := \sum_{j=0}^{m''}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j}\cdot x^{2j}} = \underline{\sum_{j=0}^{m''}c_{2j}\cdot x^{2j}}\;,\qquad \underline{f2(x) := \sum_{j=0}^{m'}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j+1}\cdot x^{2j}} = \underline{\sum_{j=0}^{m'}d_{2j}\cdot x^{2j}}\;.$$

$$\underline{f3(u) := \sum_{j=0}^{m''}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j}\cdot u^{2(m''-j)}\cdot(1-u^2)^j} = \underline{\sum_{j=0}^{m''}a_{2j}\cdot u^{2j}}\;,$$

$$\text{mit}\quad a_{2j} = (-1)^{m''-j}\cdot\sum_{h=0}^{j}\binom{n}{2(m''-j+h)}\cdot\binom{m''-j+h}{h}\;,\; a_{2j+1} = 0.$$

$$\underline{f4(v) := \sum_{j=0}^{m'}(-1)^j\cdot\binom{n}{2j+1}\cdot v^{2j}\cdot(1-v^2)^{m'-j}} = \underline{\sum_{j=0}^{m'}b_{2j}\cdot v^{2j}}\;,$$

$$\text{mit}\quad b_{2j} = (-1)^j\cdot\sum_{h=0}^{j}\binom{n}{2h+1}\cdot\binom{m'-h}{j-h},\; b_{2j+1} = 0.$$

Diese Funktionen sind vom Grad 2*m´* bzw. 2*m´´* und haben entsprechend viele Nullstellen. Wir entnehmen diese den Summenformeln *T1, T2, C* und *S* für geeignete α.

(1) $\underline{x_k := \tan\left(\frac{2k-1}{2n}\cdot\pi\right)}$, $k=1,\dots,m''$ $\Rightarrow$ $f1(\pm x_k)=0.$ $\quad -x_k = x_{n+1-k}$.

(2) $\underline{x_k := \tan\left(\frac{k}{n}\cdot\pi\right)}$, $k=1,\dots,m'$ $\Rightarrow$ $f2(\pm x_k)=0.$ $\quad -x_k = x_{n-k}$.

(3) $\underline{u_k := \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\cdot\pi\right)}$, $k=1,\dots,m''$ $\Rightarrow$ $f3(\pm u_k)=0.$ $\quad -u_k = u_{n+1-k}$.

(4) $\underline{v_k := \sin\left(\frac{k}{n}\cdot\pi\right)}$, $k=1,\dots,m'$ $\Rightarrow$ $f4(\pm v_k)=0.$ $\quad -v_k = -v_{n-k}$.

Ersetzen wir in den Funktionen die Quadrate der Argumente durch lineare Argumente, so ergeben sich Funktionen vom Grad *m´* bzw. *m´´* mit positiven Nullstellen.

$z := x^2 \quad g1(z) \cong f1(x) \quad \underline{z_k = x_k^{\,2}}$, $k=1,\dots,m''$ $\Rightarrow$ $g1(z_k)=0.$

$z := x^2 \quad g2(z) \cong f2(x) \quad \underline{z_k = x_k^{\,2}}$, $k=1,\dots,m'$ $\Rightarrow$ $g2(z_k)=0.$

$z := u^2 \quad g3(z) \cong f3(u) \quad \underline{z_k = u_k^{\,2}}$, $k=1,\dots,m''$ $\Rightarrow$ $g3(z_k)=0.$

$z := v^2 \quad g4(z) \cong f4(v) \quad \underline{z_k = v_k^{\,2}}$, $k=1,\dots,m'$ $\Rightarrow$ $g4(z_k)=0.$

1.4. Beispiel. (→ *Sammelmappe5_1.xmcd*)

$n := 8 \quad \Rightarrow \quad m' = 3,\; m'' = 4,\; k' = 1,\dots,m',\; k'' = 1,\dots,m''$.

$$f1(x) = x^8 - 28\cdot x^6 + 70\cdot x^4 - 28\cdot x^2 + 1 \;,\; x_{k''} = \tan\left(\frac{2k''-1}{16}\cdot\pi\right),\; x_{n+1-k''} = \tan\left(\frac{17-2k''}{16}\cdot\pi\right),$$

$$f2(x) = -8\cdot x^6 + 56\cdot x^4 - 56\cdot x^2 + 8 \;,\; x_{k'} = \tan\left(\frac{k'}{8}\cdot\pi\right),\; x_{n-k'} = \tan\left(\frac{8-k'}{8}\cdot\pi\right),$$

$$f3(u) = 128u^8 - 256u^6 + 160u^4 - 32u^2 + 1 \,,\; u_{k''} = \cos\left(\frac{2k''-1}{16}\pi\right),\; u_{n+1-k''} = \cos\left(\frac{17-2k''}{16}\pi\right),$$

$$\text{z.B.}\quad a_4 = a_{2\circ 2} = (-1)^{4-2}\cdot\left[\binom{8}{4}\cdot\binom{2}{0}+\binom{8}{6}\cdot\binom{3}{1}+\binom{8}{8}\cdot\binom{4}{2}\right] = 160 \,,$$

$$f4(v) = -128\cdot v^6 + 192\cdot v^4 - 80\cdot v^2 + 8 \;,\; v_{k'} = \sin\left(\frac{k'}{8}\cdot\pi\right),\; -v_{n-k'} = -\sin\left(\frac{8-k'}{8}\cdot\pi\right),$$

$$\text{z.B.}\quad b_6 = b_{2\circ 3} = (-1)^3\cdot\left[\binom{8}{1}\cdot\binom{3}{3}+\binom{8}{3}\cdot\binom{2}{2}+\binom{8}{5}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{7}\cdot\binom{0}{0}\right] = -128 = -2^7 \,.$$

$$\textit{Wurzelsatz v.Vieta} \;\Rightarrow\; \sum_{k'=1}^{3}(v_{k'} - v_{n-k'}) = \sum_{k=1}^{3}\sin\left(\frac{k}{8}\cdot\pi\right) - \sum_{k=7}^{5}\sin\left(\frac{k}{8}\cdot\pi\right) = -\frac{b_5}{b_6} = 0. \;\; (v_{k'} = v_{n-k'})$$

$$g4(z) = -128\cdot z^3 + 192\cdot z^2 - 80\cdot z + 8 \;,\; z_{k'} = \sin^2\left(\frac{k'}{8}\cdot\pi\right),$$

$$\textit{Wurzelsatz v.Vieta} \;\Rightarrow\; \prod_{k'=1}^{3}\sin^2\left(\frac{k'}{8}\cdot\pi\right) = (-1)^3\cdot\frac{8}{-128} = \frac{1}{16}\,,\;\; \sum_{k'=1}^{3}\sin^2\left(\frac{k'}{8}\cdot\pi\right) = -\frac{192}{-128} = \frac{3}{2}\,.$$

2. Gewinnung spezieller trigonometrischer Summen und Produkte

Mit Hilfe des Wurzelsatzes von VIETA können aus den Koeffizienten der Funktionen eine Vielzahl trigonometrischer Summen und Produkte mit rationalen Werten gewonnen werden.

Dabei empfiehlt es sich, zwischen geradem und ungeradem Grad der Funktionen zu unterscheiden,

$$n := 2\cdot m \;\Rightarrow\; m' = m-1\,,\; m'' = m. \qquad n := 2\cdot m+1 \;\Rightarrow\; m' = m'' = m.$$

2.1. Beispiele für $f1(x)$ und $g1(z)$.

$$f1(x) = \sum_{j=0}^{2m''} c_j\cdot x^j\;,\quad g1(z) = \sum_{j=0}^{m''} c_{2j}\cdot z^j\;,\quad c_{2j} = (-1)^j\cdot\binom{n}{2j}\,,\quad c_{2j+1} = 0.$$

$\underline{n := 2m}\;\Rightarrow\; m'' = m\,.\;\; c_0 = 1,\; c_2 = -m\cdot(2m-1),\; c_{2m-2} = (-1)^{m-1}\cdot m\cdot(2m-1),\; c_{2m} = (-1)^m\,.$

$$(a)\;\sum_{k=1}^{2m}\tan\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right) = \sum_{k=1}^{m}(x_k + x_{2m+1-k}) = (-1)^{m-1}\,c_{2m-1}/c_{2m} = 0 \quad,\; (x_{2m+1-k} = -x_k\;!).$$

$$(b)\;\sum_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{2k-1}{4m}\pi\right) = \sum_{k=1}^{m} z_k = -c_{2m-2}/c_{2m} = m\cdot(2m-1).$$

$$(c)\;\prod_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right) = \prod_{k=1}^{m} z_k = (-1)^m\,c_0/c_{2m} = 1.$$

usw.

$\underline{n := 2m+1}\;\Rightarrow\; m'' = m\,.\;\; c_0 = 1,\;\; c_2 = -(2m+1)\cdot m,\;\; c_{2m-2} = (-1)^{m-1}\cdot\dfrac{(2m+1)\cdot m\cdot(2m-1)}{3},$

$c_{2m} = (-1)^m\cdot(2m+1).$

$$(a)\;\prod_{k=1}^{m}\tan\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right)\cdot\tan\left(\frac{4m+3-2k}{4m+2}\right) = \prod_{k=1}^{m} x_k\cdot x_{2m+2-k} = (-1)^{2m}\,c_0/c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m+1}\;.$$

$$\prod_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right) = \prod_{k=1}^{m} z_k = (-1)^m\,c_0/c_{2m} = \frac{1}{2m+1}\;.$$

$$(b)\;\sum_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right) = \sum_{k=1}^{m} z_k = -c_{2m-2}/c_{2m} = \frac{1}{3}\cdot m\cdot(2m-1))\,.$$

$$(c)\;\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}\prod_{k=1}^{m} z_k = (-1)^{m-1}\,c_2/c_{2m} = m.$$

$$\Rightarrow\;\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k} = \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right) = m\cdot(2m+1) \quad\Rightarrow\;\sum_{k=1}^{2m+1}\cot^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi\right) = 2m\cdot(2m+1).$$

beachte für $k > m$: $1/z_{m+1} = 0\,,\quad 1/z_k = 1/z_{n-k}\,.$

usw.

2.2. Beispiele für *f*2(*x*) und *g*2(*z*).

$$f2(x)=\sum_{j=0}^{2m'} d_j\cdot x^j\ ,\quad g2(z)=\sum_{j=0}^{m'} d_{2j}\cdot z^j\ ,\quad d_{2j}=(-1)^j\cdot\binom{n}{2j+1},\quad d_{2j+1}=0.$$

$\underline{n:=2m}\ \Rightarrow\ m'=m-1.\quad d_0=2m,\ d_2=-\frac{2}{3}\cdot m\cdot(m-1)\cdot(2m-1),\ \ d_{2(m-1)}=(-1)^{m-1}\cdot 2m,$

$$d_{2(m-2)}=(-1)^{m-2}\cdot\frac{2m\cdot(m-1)\cdot(2m-1)}{3},\ d_{2(m-3)}=(-1)^{m-3}\cdot\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(2m-1)\cdot(2m-3)}{15}.$$

$$(a)\ \sum_{k=1}^{m-1}\tan^2\left(\frac{k}{2m}\cdot\pi\right)=\sum_{k=1}^{m-1}z_k=-d_{2m-4}/d_{2m-2}=\frac{1}{3}\cdot(m-1)\cdot(2m-1).$$

$$(b)\ \sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\tan^2\left(\frac{k}{2m}\pi\right)\tan^2\left(\frac{j}{2m}\pi\right)\ =+d_{2m-6}/d_{2m-2}=\frac{(m-2)\cdot(m-1)\cdot(2m-3)\cdot(2m-1)}{30}.$$

usw.

$\underline{n:=2m+1}\ \Rightarrow\ m'=m.\quad d_0=2m+1,\ d_2=-\frac{1}{3}\cdot m\cdot(2m-1)\cdot(2m+1),\ \ d_{2m}=(-1)^m,$

$$d_{2(m-1)}=(-1)^{m-1}\cdot m\cdot(2m+1),\ d_{2(m-2)}=(-1)^{m-2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)\cdot(2m-1)\cdot(2m+1)}{6}.$$

Beachte: $-x_k=x_{2m+1-k}\ \Rightarrow\ $ *Nullstellen*: $x_1,x_2,\dots,x_{2m}\ ,\quad z_1,z_2,\dots,z_m\ .$

$$(a)\ \sum_{k=1}^{2m}\tan\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=-d_{2m-1}/d_{2m}=0\ ,\ \prod_{k=1}^{2m}\tan\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=(-1)^{2m}\,d_0/d_{2m}=(-1)^m\cdot(2m+1).$$

$$(b)\ \sum_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=-d_{2m-2}/d_{2m}=m\cdot(2m+1)\ ,\ \prod_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=(-1)^m\,d_0/d_{2m}=2m+1\ .$$

$$(c)\ \sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\tan\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)\tan\left(\frac{j\cdot\pi}{2m+1}\right)\ =+d_{2m-2}/d_{2m}=-m\cdot(2m+1).$$

$$(d)\ \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\tan^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)\tan^2\left(\frac{j\cdot\pi}{2m+1}\right)\ =+d_{2m-4}/d_{2m}=\frac{(m-1)\cdot m\cdot(2m-1)\cdot(2m+1)}{6}.$$

$$(e)\ \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\tan^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}\cdot\prod_{k=1}^{m}z_k=(-1)^{m-1}\,d_2/d_{2m}=\frac{m\cdot(2m-1)\cdot(2m+1)}{3}.$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}=\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=\frac{m\cdot(2m-1)}{3}\quad .$$

usw.

2.3. Beispiele für $f3(u)$ und $g3(z)$.

$$f3(u)=\sum_{j=0}^{2m''} a_j \cdot u^j \,,\; g3(z)=\sum_{j=0}^{m''} a_{2j} \cdot z^j \,,\; a_{2j}=(-1)^{m''-j}\sum_{h=0}^{j}\binom{n}{2(m''-j+h)}\cdot\binom{m''-j+h}{h} \,,\; a_{2j+1}=0.$$

<u>$n:=2m$</u> $\Rightarrow$ $m''=m$. $a_0=(-1)^m$, $a_2=(-1)^{m-1}\cdot 2\cdot m^2$, $a_4=(-1)^m\cdot\frac{2}{3}\cdot m^2\cdot(m^2-1)$,

$$a_{2m-2}=(-1)^1\cdot\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{2h+2}\cdot\binom{h+1}{h}=-m\cdot 2^{2m-2},\; a_{2m}=(-1)^0\cdot\sum_{h=0}^{m}\binom{2m}{2h}\cdot\binom{h}{h}=2^{2m-1}.$$

(a) $$\prod_{k=1}^{m}\cos^2\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right)=\prod_{k=1}^{m} z_k=(-1)^m\, a_0/a_{2m}=\frac{1}{2^{2m-1}} \,,\;\Rightarrow\; \prod_{k=1}^{m}\cos\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2^m}.$$

(b) $$\sum_{k=1}^{m}\cos^2\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right)=\sum_{k=1}^{m} z_k=-a_{2m-2}/a_{2m}=\frac{1}{2}\cdot m.$$

(c) $$\prod_{k=1}^{m} z_k\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}=(-1)^{m-1}\, a_2/a_{2m}=\frac{m^2}{2^{2m-2}} \,,\quad\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{m}\cos^{-2}\left(\frac{2k-1}{4m}\cdot\pi\right)=2\cdot m^2.$$

(d) $$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{z_k}\frac{1}{z_j}\cdot\prod_{k=1}^{m} z_k=(-1)^{m-2}\, a_4/a_{2m}=\frac{m^2\cdot(m^2-1)}{3\cdot 2^{2m-2}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cos^{-2}\left(\frac{2k-1}{4m}\pi\right)\cos^{-2}\left(\frac{2j-1}{4m}\pi\right)=\frac{2}{3}\cdot m^2\cdot(m^2-1).$$

usw.

<u>$n:=2m+1$</u> $\Rightarrow$ $m''=m$. $a_0=(-1)^m\cdot(2m+1)$, $a_2=(-1)^{m-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)$,

$$a_{2m-2}=(-1)^1\cdot\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m+1}{2h+2}\cdot\binom{h+1}{h}=-(2m+1)\cdot 2^{2m-2},\; a_{2m}=(-1)^0\cdot\sum_{h=0}^{m}\binom{2m+1}{2h}\cdot\binom{h}{h}=2^{2m}.$$

(a) $$\sum_{k=1}^{m}\cos^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right)=\sum_{k=1}^{m} z_k=-a_{2m-2}/a_{2m}=\frac{2m+1}{4} \,,\;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{2m+1}\cos^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right)=\frac{2m+1}{2}.$$

(b) $$\prod_{k=1}^{m}\cos^2\left(\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right)=(-1)^m\, a_0/a_{2m}=\frac{2m+1}{2^{2m}} \,,\;\Rightarrow\; \prod_{k=1}^{m}\cos\left(\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right)=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}.$$

(c) $$\prod_{k=1}^{m} z_k\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}=(-1)^{m-1}\frac{a_2}{a_{2m}}=\frac{m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)}{3\cdot 2^{2m-1}} \,,\;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{m}\cos^{-2}\left(\frac{2k-1}{4m+2}\pi\right)=\frac{2m\cdot(m+1)}{3}.$$

usw.

2.4. Beispiele für $f4(\mathrm{v})$ und $g4(z)$.

$$f4(v)=\sum_{j=0}^{2m'} b_j\cdot v^j\ ,\ g4(z)=\sum_{j=0}^{m'} b_{2j}\cdot z^j\ ,\ b_{2j}=(-1)^j\cdot\sum_{h=0}^{j}\binom{n}{2h+1}\cdot\binom{m'-h}{j-h}\ ,\ b_{2j+1}=0.$$

$\underline{n:=2m}\ \Rightarrow\ m'=m-1$.

$$b_0=2m,\ b_2=\frac{-4m\cdot(m^2-1)}{3}\ ,\ \ b_{2m-2}=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m}{2h+1}\cdot 1=(-1)^{m-1}\cdot 2^{2m-1}\ ,$$

$$b_4=\frac{4m\cdot(m^2-1)\cdot(m^2-4)}{15}\ ,\ \ b_{2m-4}=(-1)^{m-2}\cdot\sum_{h=0}^{m-2}\binom{2m}{2h+1}\cdot(m-1-h)=(-1)^m\cdot(m-1)\cdot 2^{2m-2}\ .$$

(a) $$\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)=\prod_{k=1}^{m} z_k=(-1)^{m-1}\,b_0/b_{2m-2}=\frac{m}{2^{2m-2}}\ ,\ \Rightarrow\ \prod_{k=1}^{m-1}\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}\ .$$

(b) $$\sum_{k=1}^{m-1}\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)=-b_{2m-4}/b_{2m-2}=\frac{1}{2}\cdot(m-1)\ ,\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{m}\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot m\ .$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{m-1}\cos^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)=\sum_{k=1}^{m-1}\left(1-\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)\right)=(m-1)-\frac{m-1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(m-1)\ .$$

(c) $$\prod_{k=1}^{m-1} z_k\cdot\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{z_k}=(-1)^{m-2}\,b_2/b_{2m-2}=\frac{4\cdot m\cdot(m^2-1)}{3\cdot 2^{2m-1}}\ ,\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{m-1}\sin^{-2}\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)=\frac{2}{3}\cdot(m^2-1).$$

(d) $$\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\frac{1}{z_k}\frac{1}{z_j}\cdot\prod_{k=1}^{m-1} z_k=(-1)^{m-3}\,b_4/b_{2m-2}=\frac{m\cdot(m^2-1)\cdot(m^2-4)}{15\cdot 2^{2m-3}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\sin^{-2}\left(\frac{k\cdot\pi}{2m}\right)\cdot\sin^{-2}\left(\frac{j\cdot\pi}{2m}\right)=\frac{2}{15}\cdot(m^2-1)\cdot(m^2-4).$$

usw.

$\underline{n:=2m+1}\ \Rightarrow\ m'=m.$ $$b_{2m-2}=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{h=0}^{m-1}\binom{2m+1}{2h+1}\cdot(m-h)=(-1)^{m-1}\cdot(2m+1)\cdot 2^{2m-2}\ ,$$

$$b_{2m}=(-1)^m\cdot\sum_{h=0}^{m}\binom{2m+1}{2h+1}\cdot 1=(-1)^m\cdot 2^{2m}\ ,\ b_2=\frac{-2m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)}{3},\ b_0=2m+1.$$

(a) $$\sum_{k=1}^{m}\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=-b_{2m-2}/b_{2m}=\frac{2m+1}{4}\ ,\ \ \prod_{k=1}^{m}\sin^2\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=(-1)^m\,b_0/b_{2m}=\frac{2m+1}{2^{2m}}.$$

(b) $$\prod_{k=1}^{m} z_k\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{z_k}=(-1)^{m-1}\frac{b_2}{b_{2m}}=\frac{m\cdot(m+1)\cdot(2m+1)}{3\cdot 2^{2m-1}}\ ,\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{m}\sin^{-2}\left(\frac{k\cdot\pi}{2m+1}\right)=\frac{2m\cdot(m+1)}{3}\ .$$

usw.

3. Auswahl spezieller trigonometrischer Summen und Produkte

$$\alpha_k = \frac{k}{2m}\cdot\pi \ , \ \beta_k = \frac{k}{2m+1}\cdot\pi \ , \ \gamma_k = \frac{2k-1}{4m}\cdot\pi \ , \ \delta_k = \frac{2k-1}{4m+2}\cdot\pi \ .$$

(→ *Sammelmappe5_2.xmcd*)

3.1. Produkte

(1*a*) $\prod_{k=1}^{m-1}\sin\alpha_k = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$	(1*b*) $\prod_{k=1}^{2m-1}\sin\alpha_k = \frac{m}{4^{m-1}}$
(2*a*) $\prod_{k=1}^{m-1}\cos\alpha_k = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$	(2*b*) $\prod_{k=1}^{m-1}\cos\alpha_k \cdot \prod_{k=m+1}^{2m-1}\cos\alpha_k = (-1)^{m-1}\cdot\frac{m}{4^{m-1}}$
(3*a*) $\prod_{k=1}^{m-1}\tan\alpha_k = 1$	(3*b*) $\prod_{k=1}^{m-1}\tan\alpha_k \cdot \prod_{k=m+1}^{2m-1}\tan\alpha_k = (-1)^{m-1}$
(4*a*) $\prod_{k=1}^{m}\sin\beta_k = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$	(4*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\sin\beta_k = \frac{2m+1}{4^m}$
(5*a*) $\prod_{k=1}^{m}\cos\beta_k = \frac{1}{2^m}$	(5*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\cos\beta_k = \frac{(-1)^m}{4^m}$
(6*a*) $\prod_{k=1}^{m}\tan\beta_k = \sqrt{2m+1}$	(6*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\tan\beta_k = (-1)^m\cdot(2m+1)$
(7*a*) $\prod_{k=1}^{m}\sin\gamma_k = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$	(7*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\sin\gamma_k = \frac{2}{4^m}$
(8*a*) $\prod_{k=1}^{m}\cos\gamma_k = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$	(8*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\cos\gamma_k = (-1)^m\cdot\frac{2}{4^m}$
(9*a*) $\prod_{k=1}^{m}\tan\gamma_k = 1$	(9*b*) $\prod_{k=1}^{2m}\tan\gamma_k = (-1)^m$
(10*a*) $\prod_{k=1}^{m}\sin\delta_k = \frac{1}{2^m}$	(10*b*) $\prod_{k=1}^{2m+1}\sin\delta_k = \frac{1}{4^m}$
(11*a*) $\prod_{k=1}^{m}\cos\delta_k = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$	(11*b*) $\prod_{k=1}^{m-1}\cos\delta_k \cdot \prod_{k=m+2}^{2m+1}\cos\delta_k = (-1)^m\cdot\frac{2m+1}{4^m}$
(12*a*) $\prod_{k=1}^{m}\tan\delta_k = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}$	(12*b*) $\prod_{k=1}^{m-1}\tan\delta_k \cdot \prod_{k=m+2}^{2m+1}\tan\delta_k = (-1)^m\cdot\frac{1}{2m+1}$

Aus (3), (6), (9), (12) entstehen die entsprechenden Kotangensprodukte durch Kehrwertbildung.

3.2. Summen

(1a) $\sum_{k=1}^{m-1} \sin^2\alpha_k = \frac{1}{2}\cdot(m-1)$	(1b) $\sum_{k=1}^{m-1} \sin^{-2}\alpha_k = \frac{2}{3}\cdot(m^2-1)$
(2a) $\sum_{k=1}^{m-1} \cos^2\alpha_k = \frac{1}{2}\cdot(m-1) = (1a)$	(2b) $\sum_{k=1}^{2m} \cos^{-2}\alpha_k = \frac{2}{3}\cdot(m^2-1) = (1b)$
(3a) $\sum_{k=1}^{m-1} \tan^2\alpha_k = \frac{1}{3}\cdot(m-1)\cdot(2m-1)$	(3b) $\sum_{k=1}^{m-1} \cot^2\alpha_k = \frac{1}{3}\cdot(m-1)\cdot(2m-1)$
(4a) $\sum_{k=1}^{m} \sin^2\beta_k = \frac{1}{4}\cdot(2m+1)$	(4b) $\sum_{k=1}^{m} \sin^{-2}\beta_k = \frac{2}{3}\cdot m\cdot(m+1)$
(5a) $\sum_{k=1}^{m} \cos^2\beta_k = \frac{1}{4}\cdot(2m-1)$	(5b) $\sum_{k=1}^{m} \cos^{-2}\beta_k = 2\cdot m\cdot(m+1)$
(6a) $\sum_{k=1}^{m} \tan^2\beta_k = m\cdot(2m+1)$	(6b) $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\beta_k = \frac{1}{3}\cdot m\cdot(2m-1)$
(7a) $\sum_{k=1}^{m} \sin^2\gamma_k = \frac{1}{2}\cdot m$	(7) $\sum_{k=1}^{m} \sin^{-2}\gamma_k = 2\cdot m^2$
(8a) $\sum_{k=1}^{m} \cos^2\gamma_k = \frac{1}{2}\cdot m = (7a)$	(8b) $\sum_{k=1}^{m} \cos^{-2}\gamma_k = 2\cdot m^2 = (7b)$
(9a) $\sum_{k=1}^{m} \tan^2\gamma_k = m\cdot(2m-1)$	(9b) $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\gamma_k = m\cdot(2m-1)$
(10a) $\sum_{k=1}^{m} \sin^2\delta_k = \frac{1}{4}\cdot(2m-1) = (5a)$	(10b) $\sum_{k=1}^{m} \sin^{-2}\delta_k = 2\cdot m\cdot(m+1) = (5b)$
(11a) $\sum_{k=1}^{m} \cos^2\delta_k = \frac{1}{4}\cdot(2m+1) = (4a)$	(11b) $\sum_{k=1}^{m} \cos^{-2}\delta_k = \frac{2}{3}\cdot m\cdot(m+1) = (4b)$
(12a) $\sum_{k=1}^{m} \tan^2\delta_k = \frac{1}{3}\cdot m\cdot(2m-1) = (6b)$	(12b) $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\delta_k = m\cdot(2m+1) = (6a)$

Aus (1), …, (12) folgen die erweiterten Summen:

$$\alpha_k:\ \sum_{k=1}^{2m-1} q(k) = 2\sum_{k=1}^{m-1} q(k) + q(m)\,,\quad \begin{matrix}\beta_k\\ \gamma_k\end{matrix}:\ \sum_{k=1}^{2m} q(k) = 2\sum_{k=1}^{m} q(k)\,,\quad \delta_k:\ \sum_{k=1}^{2m+1} q(k) = 2\sum_{k=1}^{m} q(k) + q(m+1).$$

z.B.

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \sin^2\alpha_k = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(m-1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = m-1+1 = m\,.$$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \sin^{-2}\delta_k = 2\cdot 2\cdot m\cdot(m+1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2m+1)^2\,.$$

3.3. Mehrfachsummen

(1a) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cos\beta_k\cdot\cos\beta_j=-\frac{1}{4}\cdot(2m-1)$	(1b) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cos^{-1}\beta_k\cdot\cos^{-1}\beta_j=-2\cdot m\cdot(m+1)$
(2a) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cos\gamma_k\cdot\cos\gamma_j=-\frac{1}{2}\cdot m$	(2b) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cos^{-1}\gamma_k\cdot\cos^{-1}\gamma_j=-2\cdot m^2$
(3a) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\tan\beta_k\cdot\tan\beta_j=-m\cdot(2m+1)$	(3b) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cot\beta_k\cdot\cot\beta_j=-\frac{1}{3}\cdot m\cdot(2m-1)$
(4a) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\tan\gamma_k\cdot\tan\gamma_j=-m\cdot(2m-1)$	(4b) $\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=k+1}^{2m}\cot\gamma_k\cdot\cot\gamma_j=-m\cdot(2m-1)=(4a)$
(5a) $\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\sin^2\alpha_k\cdot\sin^2\alpha_j=\frac{1}{16}\cdot(m-2)\cdot(2m-3)$ (5b) $\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\sin^{-2}\alpha_k\cdot\sin^{-2}\alpha_j=\frac{2}{15}\cdot(m^2-1)\cdot(m^2-4)$	
(6a) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\sin^2\beta_k\cdot\sin^2\beta_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cos^2\delta_k\cdot\cos^2\delta_j=\frac{1}{16}\cdot(m-1)\cdot(2m+1)$ (6b) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\sin^{-2}\beta_k\cdot\sin^{-2}\beta_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cos^{-2}\delta_k\cdot\cos^{-2}\delta_j=\frac{2}{15}\cdot m\cdot(m+2)\cdot(m^2-1)$	
(7a) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cos^2\gamma_k\cdot\cos^2\gamma_j=\frac{1}{16}\cdot m\cdot(2m-3)$ (7b) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cos^{-2}\gamma_k\cdot\cos^{-2}\gamma_j=\frac{2}{3}\cdot m^2\cdot(m^2-1)$	
(8a) $\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\tan^2\alpha_k\cdot\tan^2\alpha_j=\frac{1}{30}\cdot(m-2)\cdot(m-1)\cdot(2m-3)\cdot(2m-1)$ (8b) $\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{j=k+1}^{m-1}\cot^2\alpha_k\cdot\cot^2\alpha_j=(8a)$	
(10a) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\tan^2\beta_k\cdot\tan^2\beta_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cot^2\beta_k\cdot\cot^2\beta_j=\frac{1}{6}\cdot m\cdot(m-1)\cdot(4m^2-1)$ (10b) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cot^2\beta_k\cdot\cot^2\beta_j=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\tan^2\delta_k\cdot\tan^2\delta_j=\frac{1}{30}\cdot m\cdot(m-1)\cdot(2m-1)\cdot(2m-3)$	
(11a) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\tan^2\gamma_k\cdot\tan^2\gamma_j=\frac{1}{6}\cdot m\cdot(m-1)\cdot(2m-1)\cdot(2m-3)$ (11b) $\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m}\cot^2\gamma_k\cdot\cot^2\gamma_j=(11a)$	

3.4. Nullsummen

(1a) $\sum_{k=1}^{2m-1} \cos\alpha_k = 0$	(1b) $\sum_{k=1}^{2m-1} \cot\alpha_k = 0$
(2a) $\sum_{k=1}^{2m} \cos\beta_k = \sum_{k=1}^{2m} \cos^{-1}\beta_k = 0$	(2b) $\sum_{k=1}^{2m} \tan\beta_k = \sum_{k=1}^{2m} \cot\beta_k = 0$
(3a) $\sum_{k=1}^{2m} \cos\gamma_k = \sum_{k=1}^{2m} \cos^{-1}\gamma_k = 0$	(3b) $\sum_{k=1}^{2m} \tan\gamma_k = \sum_{k=1}^{2m} \cot\gamma_k = 0$
(4a) $\sum_{k=1}^{2m-2} \sum_{j=k+1}^{2m-1} \sum_{i=j+1}^{2m} \cos\beta_k \cos\beta_j \cos\beta_i = 0$	(4b) $\sum_{k=1}^{2m-2} \sum_{j=k+1}^{2m-1} \sum_{i=j+1}^{2m} \tan\beta_k \tan\beta_j \tan\beta_i = 0$
(5a) $\sum_{k=1}^{2m-2} \sum_{j=k+1}^{2m-1} \sum_{i=j+1}^{2m} \cos\gamma_k \cos\gamma_j \cos\gamma_i = 0$	(5b) $\sum_{k=1}^{2m-2} \sum_{j=k+1}^{2m-1} \sum_{i=j+1}^{2m} \tan\gamma_k \tan\gamma_j \tan\gamma_i = 0$

3.5. Doppelte Schrittweite

$2\alpha_k = \frac{k}{m}\cdot\pi$, $2\beta_k = \frac{2k}{2m+1}\cdot\pi$, $2\gamma_k = \frac{2k-1}{2m}\cdot\pi$, $2\delta_k = \frac{2k-1}{2m+1}\cdot\pi$.

Verwende $\cos(2\varphi) = 2\cdot\cos^2\varphi - 1$ *und* $\sin(2\varphi) = 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

(1a) $\sum_{k=1}^{m-1} \cos(2\alpha_k) = 0$	(1b) $\sum_{k=1}^{m} \cos(2\gamma_k) = 0$
(2a) $\sum_{k=1}^{m} \cos(2\beta_k) = -\frac{1}{2}$	(2b) $\sum_{k=1}^{m} \cos(2\delta_k) = \frac{1}{2}$
(3a) $\prod_{k=1}^{m-1} \sin(2\alpha_k) = \frac{m}{2^{m-1}}$	(3b) $\prod_{k=1}^{m} \sin(2\gamma_k) = \frac{1}{2^{m-1}}$
(4a) $\prod_{k=1}^{m-1} \sin(2\beta_k) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$	(4b) $\prod_{k=1}^{m-1} \sin(2\delta_k) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$