Preprint Series

Institute for Computational Mathematics in Science and Technology

IAMIWT Institut für Angewandte Mathematik und Informatik in Wissenschaft und Technik

Edited by

IAMIWT, Hochschule Neubrandenburg
University of Applied Sciences
Broadaer Str. 2, 17033 Neubrandenburg, Germany

online: iamiwt.hs-nb.de

Preprint Series

Institute for Computational Mathematics in Science and Technology

Erzeugung von Potenzreihen, deren Koeffizienten Werte der Riemannschen Zetafunktion enthalten

Gerhard Strey

IAMIWT Preprint Series

Preprint 01-11

February 2011

h-g.strey@t-online.de
http://www.sr-strey.de

Hochschule Neubrandenburg
University of Applied Sciences

Erzeugung von Potenzreihen, deren Koeffizienten Werte der Riemannschen Zetafunktion enthalten

GERHARD STREY

ABSTRACT. Power series with values of the zeta function.

In diesem Artikel werden aus bekannten Potenzreihen durch gliedweise Multiplikation mit Werten der Zetafunktion $\zeta(x)$ neue Reihen gebildet und diese nach einem einheitlichen Prinzip durch äquivalente Summen, Produkte oder geschlossene Funktionsausdrücke beschrieben:

Der Potenzreihe $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$ wird die Reihe $F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k+\mu) \cdot z^k$ mit den Parametern $\lambda > 0$ und μ zugeordnet und die Funktion $F_{\lambda,\mu}(z)$ untersucht.

Der Ansatz beruht auf dem bekannten Doppelreihensatz und verwendet die Eigenschaften der vorgegebenen Potenzreihe.
Ein Ergebnis sind Summenformeln für viele konkreter Reihen der Form $F_{\lambda,\mu}(z)$.

2000 Mathematics Subject Classification. 11M99.

Inhalt

Erzeugung von Potenzreihen, deren Koeffizienten Werte der Riemannschen Zetafunktion enthalten

1. Einführung und Bezeichnungen

Reihen, deren Glieder Werte der Riemannschen Zetafunktion und ihrer Verallgemeinerungen enthalten, sind in vielfältiger Weise untersucht worden, angeregt unter anderem durch die Suche nach Darstellungen der Zetawerte für ungerade natürliche Argumente. Einen ausführlichen Einblick in die verschiedenen Ansätze, Ergebnisse und Problemfelder aus neuerer Zeit bieten die Veröffentlichungen von H.M. SRIVASTAVA, J. CHOI, S. ADAMCHIK und. Andere. Genannt seien zum Beispiel die Artikel [c/s/g], [a/s], [wu], [c/s1], [c/s2] und die umfassende Monographie [S/C]. Sie enthalten eine erstaunliche Vielfalt von Reihenentwicklungen, Summenformeln und weitreichende Verallgemeinerungen.

Diese Ausarbeitung setzt sich das eingeschränkte Ziel, nach einem einheitlichen Prinzip aus einigen bekannten Potenzreihen durch gliedweise Multiplikation mit Zetawerten neue Reihen zu bilden und diese durch äquivalente Summen, Produkte oder geschlossene Funktionsausdrücke zu beschreiben. Der Ansatz beruht auf dem bekannten Doppelreihensatz und verwendet die Eigenschaften der vorgegebenen Potenzreihe.

Im Folgenden sind in der Regel $k,n,m \in \mathbf{N}$, $x,y,\alpha,\beta,\lambda,\mu \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$.

Wir bezeichnen mit $\zeta_*(x)$ eine für <u>reelle</u> x definierte „modifizierte Zetafunktion“

(1) $$\zeta_*(x) := \begin{cases} \zeta(x) & , \ x > 0 \ , \ x \neq 1 \\ \gamma & , \ x = 1 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

mit der RIEMANNschen Zetafunktion

(2) $$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \ , \quad x > 1$$

(3) $$\zeta(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \frac{N^{1-x}}{1-x} \right) , \ 0 < x < 1$$

und der EULER-MASCHERONIschen Konstanten

(4) $$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - ln(N) \right) = 0{,}577215664901\ldots \ .$$

2. Das Transformationsprinzip

Der komplexen Potenzreihe (mit reellen Koeffizienten)

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k \tag{5}$$

wird die Potenzreihe

$$F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k \tag{6}$$

mit den reellen Parametern $\lambda > 0$ und μ zugeordnet.

Die Transformation der <u>Originalfunktion</u> $f(z)$ in die <u>Bildfunktion</u> $F_{\lambda,\mu}(z)$ wird gelegentlich mit dem Zuordnungspfeil beschrieben:

$$f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\eta}(z). \tag{7}$$

Die <u>Konvergenzradien</u> *r, R* von Original- bzw. Bildreihe sind gleich: <u>$R=r$</u> .

Denn wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \zeta(x)=1$ und $\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)=\zeta(\lambda\cdot k+\mu)$ für genügend großes *k* gilt

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|\cdot|\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)|}{|a_{k+1}|\cdot|\zeta_*(\lambda\cdot(k+1)+\mu)|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}=r\,.$$

Für die Differenzenreihe $DF_{\lambda,\mu}(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot(\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)-1)\cdot z^k$ ist <u>$R=2^{\lambda}\cdot r$</u>.

Dies folgt aus

$$\zeta(\lambda\cdot(k+1)+\mu)-1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}\cdot\frac{1}{n^{\lambda\cdot k+\mu}}<\frac{1}{2^{\lambda}}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot k+\mu}}=\frac{1}{2^{\lambda}}\cdot(\zeta(\lambda\cdot k+\mu)-1).\ \text{(Vgl. (12)).}$$

Mit den Festlegungen in (8) gelten die <u>grundlegenden Beziehungen</u> (8), (9) und (10)

$$g(z)=f(z)\;-\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k\cdot z^k\;,\quad k_0:=min\,\{\,k\ge 0\mid \lambda\cdot k+\mu>1\,\}=\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0+1^{*)} \tag{8}$$

$$G_{\lambda,\eta}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot g\!\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right) \tag{9}$$

$$F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k+G_{\lambda,\mu}(z). \tag{10}$$

---

*) $[x]_0:=\max\{[x],-1\}$, $[x]=floor(x)$

Denn es gilt wegen $k > k_0$ mit (2)

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \zeta(\lambda \cdot k+\mu)\cdot z^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k+\mu}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot \frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right).$$

Da die betreffenden Zetareihen absolut konvergent sind, ist die Vertauschung der Summation für jene z erlaubt, für die die Reihe $F_{\lambda,\mu}(z)$ normal konvergent ist. (Siehe z. B. [F/B, III.2]).

Für die Differenzenreihe $DG_{\lambda,\mu}(z)$ bzgl. (8), (9) gilt

$$\text{(11)} \qquad DG_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \cdot (\zeta(\lambda \cdot k+\mu)-1)\cdot z^k = \{G_{\lambda,\mu}(z)-g(z)\}, \qquad k_0 = \left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0 + 1 .$$

Darin ist $\{G_{\lambda,\mu}(z)-g(z)\} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0}^{N} a_k \cdot (\zeta(\lambda \cdot k+\mu)-1)\cdot z^k$ gesetzt und assoziiert, dass für $|z|<r$ $DG_{\lambda,\mu}(z)=G_{\lambda,\mu}(z)-g(z)$ gilt und für $r\le|z|<R\cdot 2^{\lambda}$ in der Regel $DG_{\lambda,\mu}(z)$ durch geeignete Umformung der Differenz $G_{\lambda,\mu}(z)-g(z)$ direkt gewonnen werden kann.

Aus (214) folgt für $N \ge k_0$ $\left|\sum_{k=N}^{\infty} a_k \cdot (\zeta(\lambda \cdot k+\mu)-1)\cdot z^k\right| < \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \cdot \frac{1}{2^{\lambda\cdot k+\mu-2}} \cdot |z|^k$.

Für die Differenzenreihe $DF_{\lambda,\mu}(z)$ gilt damit folgende Restgliedabschätzung:

$$\text{(12)} \qquad DF_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot (\zeta_*(\lambda \cdot k+\mu)-1)\cdot z^k + R_N(z), \quad N \ge k_0$$

.
$$|R_N(z)| < 2^{2-\mu} \cdot \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \cdot \left|\frac{z}{2^{\lambda}}\right|^k .$$

Aus (12) folgt zum Beispiel für $a_k \ge 0$ mit $N = k_0$: $\left|DG_{\lambda,\mu}(z)\right| < 2^{2-\mu} \cdot g\left(\left|\frac{z}{2^{\lambda}}\right|\right)$.

3. Transformationsregeln

Mit $f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\eta}(z)$ und $g(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\eta}(z)$ ergeben sich offensichtlich die <u>Transformationsregeln</u>

R(1) $\quad z^n \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} \zeta_*(\lambda\cdot n+\mu)\cdot z^n \qquad n\ge 0\ ,\ ganzz.$

R(2) $\quad a\cdot f(z)+b\cdot g(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} a\cdot F_{\lambda,\mu}(z)+b\cdot G_{\lambda,\mu}(z)$

R(3) $\quad f(a\cdot z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(a\cdot z)$

R(4) $\quad u=z^n,\ \ g(z)=f(u) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=F_{n\cdot\lambda,\mu}(u) \qquad n>0\ ,\ ganzz.$

R(5) $\quad g(z)=z^n\cdot f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=z^n\cdot F_{\lambda,\mu+n\cdot\lambda}(z)$

R(6) $\quad a_k=0\ f\ddot{u}r\ k\le m,\ \ a_m\ne 0\ ,\ m\ge 0\ ,\ ganzz.,\ z\ne 0$

$$g(z)=\frac{1}{z^m}f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\frac{1}{z^m}F_{\lambda,\mu-m\cdot\lambda}(z)$$

R(7) $\quad g(z)=\frac{d}{dz}f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\frac{d}{dz}F_{\lambda,\mu-\lambda}(z)$

R(8) $\quad g(z)=\int f(z)\ dz \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\mu}(z)=\int F_{\lambda,\mu+\lambda}(z)\ dz$

Die Beziehungen (8), (9), (10) sind formuliert als Regel

R(9) Gegeben sind $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot z^k$, $\lambda>0\ ,\ \mu$. $\ k_0:=min\left\{k\ge 0 \mid \lambda\cdot k+\mu>1\right\}$,

$$g(z)=f(z)\ -\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k\cdot z^k \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} G_{\lambda,\eta}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\mu}\cdot g\left(\frac{z}{n^\lambda}\right)$$

$$f(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{k_0-1}a_k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k+G_{\lambda,\mu}(z).$$

Das Grenzverhalten der Bildfunktionen beschreibt die Regel

R(10) $\quad f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot z^k \bullet\!\xrightarrow{\lambda\to\infty,\mu} F_{\infty,\mu}(z)=f(z).$

Die Bildreihen $F_{\lambda,\mu}(z)$ *konvergieren für* $\lambda\to\infty$ *gegen die Originalreihe* $f(z)$, ($a_0=0$).
Die Konvergenz ist in jedem abgeschlossenen Kreis mit dem Radius $\rho<r$ *gleichmäßig.*
(*Siehe* **Anhang B**.)

4. Bildfunktionen der Logarithmusreihe

4.1. Die allgemeine Lösung

Gegeben sind

(13) $$f(z) = -ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot z^k \quad , \quad |z| \le 1,\ z \ne 1 \quad \text{und} \quad \lambda > 0\ ,\ \mu \in \boldsymbol{R},$$

(14) $$s(z) = \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \frac{1}{k} \cdot z^k \quad , \quad k_0 = min\{k \ge 0 \mid \lambda \cdot k + \mu > 1\} = \left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0 + 1 .$$

Aus $$g(z) = -ln(1-z) - s(z) = -ln\left((1-z) \cdot e^{s(z)}\right)$$

folgt $$G_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} ln\left[\left(1 - \frac{z}{n^{\lambda}}\right) \cdot e^{s\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)}\right]^{\frac{1}{n^{\mu}}} = -ln\, P_{\mu}(z,\lambda)$$

mit dem Weierstraß-Produkt

(15) $$P_{\mu}(z,\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n^{\lambda}}\right) \cdot e^{s_{\mu}\left(\frac{z}{n^{\lambda}},\lambda\right)}\right]^{\frac{1}{n^{\mu}}} \quad , \quad s_{\mu}\left(\frac{z}{n^{\lambda}},\lambda\right) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)^k .$$

Zusammenfassung:

(16) $$f(z) = -ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot z^k \quad \bullet\!\xrightarrow{\lambda>0,\mu} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = F_{\lambda,\mu}(z) ,$$

(17) $$F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0} \frac{1}{k} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k - ln\, P_{\mu}(z,\lambda), \quad |z| \le 1,\ z \ne 1 .$$

Differenziert man die Gleichung (16) und erweitert mit *z*, oder wendet die Trnasformations-regeln R(7) und R(5) an, so gilt

(18) $$\frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \quad \bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0} \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k - z \cdot Q_{\mu}(z,\lambda)$$

mit $Q_{\mu}(z,\lambda) = \frac{d}{dz} ln\, P_{\mu}(z,\lambda)$, (siehe (20)).

4.2. Einfache Eigenschaften des Produktes $P_\mu(z,\lambda)$

Es gilt $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\left|\frac{z}{n^\lambda}\right|^{k_0}=|z|^{k_0}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot k_0+\mu}}=|z|^{k_0}\cdot\zeta(\lambda\cdot k_0+\mu)<\infty,$$

also ist das Produkt (15) normal konvergent und definiert auf ***C*** eine ganze Funktion mit den Nullstellen $z=n^\lambda$. (WEIERSTRAßscher Produktsatz. Siehe z. B. [F/B, IV.2]).

Wegen

$$s_\mu\left(\frac{z}{\lambda},\lambda\right)+s_\mu\left(\frac{-z}{\lambda},\lambda\right)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0}\frac{1}{k\cdot n^{\lambda\cdot k}}\cdot\left[z^k+(-z)^k\right]=\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{2\lambda}\right]_0}\frac{2}{2k}\cdot\frac{1}{n^{\lambda\cdot 2k}}\cdot z^{2k}=s_\mu\left(\frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}},2\lambda\right)$$

und $\left(1+\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)=\left(1-\frac{z^2}{n^{2\lambda}}\right)$ gilt die Verdopplungsformel

(19) $$P_\mu(z,\lambda)\cdot P_\mu(-z,\lambda)=P_\mu\left(z^2,2\cdot\lambda\right).$$

Aus $\ln P_\mu(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\left[\ln\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)+s_\mu\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right)\right]$ folgt die logarithmische Ableitung

(20) (a) $$Q_\mu(z,\lambda):=\frac{P_\mu'(z,\lambda)}{P_\mu(z,\lambda)}=\frac{d}{dz}\ln P_\mu(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\left\{\frac{1}{z-n^\lambda}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0}\frac{z^{k-1}}{n^{\lambda\cdot k}}\right\}$$

(b) $$Q_{\mu-\lambda}(z,\lambda)=z\cdot Q_\mu(z,\lambda),$$ (siehe **Anhang B**).

Für $\lambda+\mu>1$, $\lambda+\mu=1$, $2\cdot\lambda+\mu=1$ ist entsprechend $k_0-1=0,\ 1,\ 2$ und damit vereinfachen sich die Formeln (15) und (20) zu

(21) (a) $$P_{\mu>1-\lambda}(z,\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)^{\frac{1}{n^\mu}}$$ (b) $$Q_{\mu>1-\lambda}(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\frac{1}{z-n^\lambda},$$

(22) (a) $$P_{1-\lambda}(z,\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)^{n^{\lambda-1}}\cdot e^{\frac{z}{n}}\right]$$ (b) $$Q_{1-\lambda}(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\cdot(z-n^\lambda)},$$

(23) (a) $$P_{1-2\lambda}(z,\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot e^{\frac{z}{n^\lambda}+\frac{z^2}{2\cdot n^{2\lambda}}}\right]^{n^{2\lambda-1}}$$ (b) $$Q_{1-2\lambda}(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n\cdot(z-n^\lambda)}.$$

4.3. Der Spezialfall $\mu = 0$

Für den speziellen Wert $\mu = 0$ ergeben sich bekannte Produkt- und Summenformeln mit Beziehungen zur Gammafunktion Γ(z) und Digammafunktion ψ(z).
Im **Anhang A** *sind einige Eigenschaften dieser Funktionen zusammengestellt.*

Auf EULER gehen folgende Spezialfälle zurück, (verwende (22) , (21) mit z^2 und (201)):

(24) $$P_0(z,1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}\right] = \frac{e^{\gamma\cdot z}}{-z\cdot\Gamma(-z)} = \frac{e^{\gamma\cdot z}}{\Gamma(1-z)}.$$

(25) $$P_0(z^2,2) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z} = P_0(0,2) = 1$$

Mit (19) erhält man den Ergänzungssatz der Gammafunktion ((204))

(26) $$\frac{1}{\Gamma(1+z)\cdot\Gamma(1-z)} = P_0(-z,1)\cdot P_0(z,1) = P_0(z^2,2) = \frac{\sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z}.$$

Durch erneute Anwendung von (19) auf $P_0(-z^2,2) = P_0((i\cdot z)^2,2)$ und $P_0(z^2,2)$ folgt

(27) $$P_0(z^4,4) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^4}{n^4}\right) = \frac{\sinh(\pi\cdot z)\cdot\sin(\pi\cdot z)}{(\pi\cdot z)^2}$$

Die logarithmischen Ableitungen von $P_0(z,\lambda)$ ergeben für (24), (25) mittels (22), (21), (205)

(28) $$Q_0(z,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\cdot(z-n)} = \frac{d}{dz}(\gamma\cdot z - \ln\Gamma(1-z)) = \gamma + \psi(1-z), \quad Q_0(0,1) = 0,$$

(29) $$Q_0(z^2,2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \frac{1}{2\cdot z}\cdot\left(\pi\cdot\cot(\pi\cdot z) - \frac{1}{z}\right), \quad Q_0(0,2) = -\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Für beliebiges $\lambda > 1$ gilt, (siehe **Anhang B**),

(30) $$P_0(z,\lambda>1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k(\lambda)\cdot z^k$$

mit $$a_k(\lambda) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k<\infty}\frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^\lambda}, \quad i_j\in\boldsymbol{N}.$$

Speziell gilt $a_1(\lambda) = \zeta(\lambda)$, $2\cdot a_2(\lambda) = \zeta(\lambda)^2 - \zeta(2\cdot\lambda)$, $a_k(2) = \dfrac{\pi^{2\cdot k}}{(2\cdot k+1)!}$.

4.4. Der Spezialfall $\mu = -1$

Aus (22) und (23) folgen

$$(31)\quad (a)\ P_{-1}(z,2) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n^2}\right)^n \cdot e^{\frac{z}{n}}\right] \qquad (b)\ Q_{-1}(z,2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\cdot(z-n^2)},$$

$$(32)\quad (a)\ P_{-1}(z,1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)^n \cdot e^{z+\frac{z^2}{2\cdot n}}\right] \qquad (b)\ Q_{-1}(z,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n\cdot(z-n)} = z\cdot Q_0(z,1).$$

Es gelten die Funktionalgleichungen, (siehe **Anhang B**),

$$(33)\qquad P_{-1}(1-z,\,1) = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{\Gamma(z)}\cdot exp\left(\frac{\gamma}{2}-(1+\gamma)\cdot z\right)\cdot P_{-1}(-z,\,1),$$

$$(34)\qquad P_{-1}(1-z,\,1)\cdot P_{-1}(1+z,\,1) = -2\cdot z\cdot sin(\pi\cdot z)\cdot e^{\gamma}\cdot P_{-1}\left(z^2,\,2\right).$$

Mit der von BARNES (1899) eingeführten G-Funktion besteht folgender Zusammenhang ([W/W: XII, *Examples*], [F: 2.15] und ausführlich [S/C: 1.3]):

$$(35)\qquad G(1+z) := p(z)\cdot P_{-1}(-z,\,1) \ \text{ mit }\ p(z) := (2\cdot\pi)^{z/2}\cdot exp\left(-\frac{z\cdot(z+1)}{2}-\frac{\gamma}{2}\cdot z^2\right)$$

Wegen $p(z)/p(z-1) = (2\cdot\pi)^{1/2}\cdot exp(\gamma/2-(1+\gamma)\cdot z)$ vereinfacht sich (33) zu

$$(36)\qquad G(1+z) = \Gamma(z)\cdot G(z)\ , \qquad G(1) = p(0)\cdot P_{-1}(0,1) = 1$$

und für die logarithmische Ableitung gilt nach (35) und (32)(b), (28)

$$(37)\qquad \frac{G'(1+z)}{G(1+z)} = \frac{p'(z)}{p(z)} - Q_{-1}(-z,1) = \frac{1}{2}(ln(2\cdot\pi)-1) + z\cdot(\psi(1+z)-1).$$

Mit der GLAISHER-KINKELIN Konstanten A , [F: 2.15, 2.18] , gelten die speziellen Werte

$$(38)\quad A := exp\left(\frac{-\zeta'(2)}{2\cdot\pi^2}+\frac{ln(2\cdot\pi)+\gamma}{12}\right) = 1.282427...\ ,\quad \zeta'(2) = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln(n)}{n^2} = -0.937548...$$

$$(39)\quad (a)\ G\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{24}}\cdot\pi^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{\frac{1}{8}}\cdot A^{-\frac{3}{2}} \qquad (b)\ P_{-1}\left(\frac{1}{2},1\right) = 2^{\frac{7}{24}}\cdot e^{\frac{\gamma}{8}}\cdot A^{-\frac{3}{2}} = 0.905913...$$

$$(c)\ P_{-1}\left(-\frac{1}{2},1\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}\cdot P_{-1}\left(\frac{1}{2},1\right) = 2^{-\frac{5}{24}}\cdot e^{\frac{\gamma+4}{8}}\cdot A^{-\frac{3}{2}} = 1.056133...\ ;$$

(a) stammt von BARNES, (b) und (c) folgen dann aus (35) und (33), (204).

4.5. Zusammenstellung einiger Bildreihen von $f(z) = -ln(1-z)$

Nach (17) und (24) gilt

$$F_{1,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta_*(k) \cdot z^k = \gamma \cdot z - ln\, P_0(z,1) = \gamma \cdot z - ln \frac{e^{\gamma \cdot z}}{\Gamma(1-z)} = ln\,\Gamma(1-z), \text{ d. h.}$$

(40) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(k) \cdot z^k = -ln\, P_0(z,1) = -\gamma \cdot z + ln\,\Gamma(1-z)} \quad , \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne 1,$$

und mit $\zeta_*(1) = \gamma$ sowie $F_{1,0}(z) - f(z) = ln\,\Gamma(1-z) + ln(1-z) = ln[(1-z)\Gamma(1-z)] = ln\,\Gamma(2-z)$

(41) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(k) - 1) \cdot z^k = (1-\gamma) \cdot z + ln\,\Gamma(2-z)} \;, \qquad |z| \le 2 \;,\; z \ne 2 \,.$$

Nach (17) und (25) gilt $F_{2,0}\left(z^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta_*(2k) \cdot z^{2 \cdot k} = ln \frac{\pi \cdot z}{sin(\pi \cdot z)}$, d. h.

(42) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(2 \cdot k) \cdot z^{2 \cdot k} = ln \frac{\pi \cdot z}{sin(\pi \cdot z)}} \quad , \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne \pm 1 \;,$$

(43) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \zeta(2 \cdot k) \cdot z^{2 \cdot k} = ln \frac{\pi \cdot z}{sinh(\pi \cdot z)}} \;, \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne \pm i \,.$$

(43) folgt aus (42) für $z := i \cdot z$, d. h. $z^2 := -z^2$ und $sin(i \cdot \pi \cdot z) = i \cdot sinh(\pi \cdot z)$.

Analog zu (42) folgt aus (17) und (27)

(44) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(4 \cdot k) \cdot z^{4 \cdot k} = ln \frac{(\pi \cdot z)^2}{sinh(\pi \cdot z) \cdot sin(\pi \cdot z)}} \;, \qquad |z| \le 1,\; z \ne \pm 1,\; z \ne \pm i \,.$$

Aus (18) und (28) folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_*(k) \cdot z^k = \zeta_*(1) \cdot z - z \cdot Q_0(z,1) = \gamma \cdot z - z \cdot (\gamma + \psi(1-z))$ bzw.

(45) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) \cdot z^k = -\gamma \cdot z - z \cdot \psi(1-z)} \;, \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne \pm 1,$$

(46) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \zeta(k) \cdot z^k = \gamma \cdot z + z \cdot \psi(1+z)} \;, \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne \pm 1$$

(47) $$\underline{\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \zeta(k) \cdot z^{k-1}} \;, \qquad |z| \le 1 \;,\; z \ne \pm 1,\; z \ne 0$$

(48) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k+1)\cdot z^{2k+1} = -\frac{\psi(1-z)+\psi(1+z)}{2}\cdot z - \gamma\cdot z \quad , \quad |z|\le 1\ ,\ z\ne \pm 1 .$$

(46) und (47) folgen aus (45) für $z := -z$ und (207). Die Summe (45)+(46) ergibt (48).

Mit $z := z^2$ folgt aus (18) $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_*(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = -z^2\cdot Q_0(z^2,2)$ und mit (29)

(49) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \frac{1}{2}\cdot[1-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2} \quad , \quad |z|\le 1\ ,\ z\ne \pm 1 .$$

Hieraus folgen für $z := i\,z$ und $cot(i\cdot\pi\cdot z) = -i\cdot coth(\pi\cdot z)$ die Reihen (50), (51)=(49)+(50)

(50) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \frac{1}{2}\cdot[\pi\cdot z\cdot \coth(\pi\cdot z)-1] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2+z^2}\ ,\ |z|\le 1\ ,\ z\ne \pm i\ ,$$

(51) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(4k-2)\cdot z^{4\cdot k-2} = \frac{\pi}{4}\cdot z\cdot[coth(\pi z)-cot(\pi z)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot z^2}{n^4-z^4}\ ,$$

$$|z|\le 1,\ z\ne \pm 1,\ z\ne \pm i\ .$$

Unter Beachtung der Originalreihen folgen aus (45), (46), (49) bzw. (51) die Reihen

(52) (a) $$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k)-1)\cdot z^k = -z\cdot\psi(1-z)-\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1-z} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n\cdot(n-z)} \qquad |z|\le 1\ ,\ z\ne \pm 1$$

(b) $$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k)-1)\cdot z^k = -z\cdot\psi(2-z)+z\cdot(1-\gamma) \qquad |z|\le 2\ ,\ z\ne \pm 2$$

(53) (a) $$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k(\zeta(k)-1)\cdot z^k = z\cdot\psi(1+z)+\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1+z} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n\cdot(n+z)} \qquad |z|\le 1,\ z\ne \pm 1$$

(b) $$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k(\zeta(k)-1)\cdot z^k = z\cdot\psi(2+z)-z\cdot(1-\gamma) \qquad |z|\le 2\ ,\ z\ne \pm 2$$

(54) (a) $$\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2\cdot k)-1)\cdot z^{2\cdot k} = \frac{1-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)}{2}-\frac{z^2}{1-z^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2} \qquad |z|\le 1,\ z\ne \pm 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2\cdot k)-1)\cdot z^{2\cdot k} = \frac{z}{2}\cdot(\psi(2+z)-\psi(2-z)) \qquad |z|\le 2,\ z\ne \pm 2\cdot i$$

(55) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(4k-2)-1)\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{\pi}{4}\cdot z\cdot[coth(\pi z)-cot(\pi z)]-\frac{z^2}{1-z^4}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\cdot z^2}{n^4-z^4}$

$|z|\le 1,\ z\ne\pm 1,\ z\ne\pm i,$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(4k-2)-1)\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{1}{4}\left[\pi\cdot z\cdot coth(\pi\cdot z)-1-\frac{2\cdot z^2}{1+z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot z^2}{n^2-z^2}\right]$

$|z|\le 2,\ z\ne\pm 2,\ z\ne\pm 2\cdot i.$

Für die Summendarstellung in (52)(a), (53)(a) setze nach (28) $\psi(1\pm z)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n\cdot(n\pm z)}$

und für (52)(b), (53)(b) verwende (207): $\psi(2\pm z)=\frac{1}{1\pm z}+\psi(1\pm z)$. (52) + (53) = (54).

(55)(b) folgt aus (a), indem nach (29) $\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot z^2}{z^2-n^2}$ gesetzt wird.

Aus den Potenzreihen (40) bis (55) erhält man für ausgewählte z-Werte und Kombinationen eine Vielzahl spezieller Zahlenreihen. Nachfolgend einige Beispiele:

Setze in (40) $z=-1$, $z=\pm\frac{1}{2}$ und bilde (d) = (b) – (c). Setze in (42) $z=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{6}$:

(56) (a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\zeta(k)=\gamma$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}\cdot\zeta(k)=-\frac{\gamma}{2}+ln(\sqrt{\pi})$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 2^k}\cdot\zeta(k)=\frac{\gamma}{2}+ln(\sqrt{\pi})-ln(2)$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\cdot 4^k}\cdot\zeta(2k+1)=ln(2)-\gamma$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 4^k}\cdot\zeta(2\cdot k)=ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 6^{2\cdot k}}\cdot\zeta(2\cdot k)=ln\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Setze in (41) $z=1,\ z=-1,\ z=\frac{3}{2},\ z=-\frac{3}{2}$ und bilde (e) = (a) + (b) , (f) = (a) + (56)(a) , (g) = (c) + (d):

(57) (a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta(k)-1)=1-\gamma$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot(\zeta(k)-1)=ln(2)-1+\gamma$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot(\zeta(k)-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{3}{2}\cdot(1-\gamma)+ln(\sqrt{\pi})$

(d) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cdot(\zeta(k)-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{3}{2}\cdot(\gamma-1)+ln\left(\frac{15\cdot\sqrt{\pi}}{8}\right)$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(2\cdot k)-1) = ln(2)$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\zeta(2\cdot k) - \frac{4k+1}{4k+2}\right) = 1$.

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(2\cdot k)-1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot k} = ln\left(\frac{15\cdot\pi}{8}\right)$

Setze in (49) $z = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}$ und bilde (c) = (a) – (b). Setze in (51) $z = \frac{1}{2}$:

(58) (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2\cdot k)}{4^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2\cdot k)}{4^{2\cdot k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16\cdot n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k - 1}{4^{2k}} \zeta(2\cdot k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cdot n^2}{(4\cdot n^2 - 1)\cdot(16\cdot n^2 - 1)} = \frac{\pi}{8}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2k-1}} \zeta(4k-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot n^2}{16\cdot n^4 - 1} = \frac{\pi}{8} \cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Setze $z = \frac{1}{2}$ in (45), (46) und (48) ein (*siehe* (210)) und bilde (d) = (a) + (b). Mit $z = \frac{3}{4}$ und $z = \frac{1}{4}$ folgt aus (45) durch Subtraktion (e); *siehe* (208) $\psi(3/4) - \psi(1/4) = \pi \cdot cot(\pi/4)$:

(59) (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \zeta(k) = ln(2)$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \zeta(k) = 1 - ln(2)$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \zeta(2\cdot k+1) = 2\cdot ln(2) - 1$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \zeta(2\cdot k) = \frac{1}{2}$.

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 1}{4^k} \zeta(k+1) = \pi$.

Setze $z = 1$ in (52)(b) – (55)(b) ein (*siehe* (210)), e) = (a) – (c), (f) = (b) – (57)(b).

(60) (a) $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k)-1) = 1$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (\zeta(k)-1) = \frac{1}{2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2\cdot k)-1) = \frac{3}{4}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(4k-2)-1) = \frac{\pi}{4} \cdot coth(\pi) - \frac{1}{8}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta(2k+1)-1) = \frac{1}{4}$ (f) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k-1}{k} (\zeta(k)-1) = \frac{3}{2} - ln(2) - \gamma$

Setze $z=\frac{1}{2}$ bzw. $z=\frac{3}{2}$ in (52) – (55) ein und verwende (210):

(61) (a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{2^k}=ln(2)-\frac{1}{2}$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{2^k}\cdot 3^k=3\cdot ln(2)+\frac{3}{2}$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\zeta(k)-1}{2^k}=\frac{5}{6}-ln(2)$ (d) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\zeta(k)-1}{2^k}\cdot 3^k=\frac{31}{10}-3\cdot ln(2)$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2\cdot k)-1}{4^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4\cdot n^2-1}=\frac{1}{6}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2\cdot k)-1}{4^k}\cdot 9^k=\frac{23}{10}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{4^{2k-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4\cdot n^2}{16\cdot n^4-1}=\frac{\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{15}$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{4^{2k-1}}\cdot 9^{2\cdot k-1}=\frac{3\cdot\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)+\frac{36}{65}$

Für (h) vereinfache in (55)(b): $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot(3/2)^2}{n^2-(3/2)^2}=18\cdot\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2\cdot n-3}-\frac{1}{2\cdot n+3}\right)=\frac{23}{5}$.

Nach (16) und (17) gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(k-1)\cdot z^k=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\cdot\zeta_*(k-1)\cdot z^k-ln\,P_{-1}(z,1),$$ d.h. für $z:=-z$ in (35) folgt

(62) $$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta(k-1)\cdot z^k=-ln\,P_{-1}(z,1)=\frac{z}{2}\cdot[1-ln(2\cdot\pi)-(1+\gamma)\cdot z]-ln\,G(1-z)$$

$|z|\le 1,\ z\ne 1.$

Aus (62) folgt mit (33)

(63) $$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta(k-1)\cdot\left[(1-z)^k-(-z)^k\right]=ln\,\Gamma(z)-ln\sqrt{2\cdot\pi}+(1+\gamma)\cdot z-\frac{\gamma}{2}$$

$|1-z|\le 1,\ |z|\le 1,\ z\ne 0,\ z\ne 1.$

(64) (a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{(k+1)\cdot 2^{k+1}}=-ln\,P_{-1}\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{7}{24}\cdot ln(2)-\frac{\gamma}{8}+\frac{3}{2}\cdot ln\,A$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\zeta(k)}{(k+1)\cdot 2^{k+1}}=ln\,P_{-1}\left(-\frac{1}{2},1\right)=-\frac{5}{24}\cdot ln(2)+\frac{\gamma}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot ln\,A$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(k+1)\cdot 4^{k+1}} = -\frac{1}{12}\cdot ln(2) - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{2} + 3\cdot ln\,A$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2\cdot k)}{(2k+1)\cdot 4^{k}} = \frac{1}{2}\cdot(1 - ln(2))$

(a) und (b) folgen mit $z = \pm 1/2$ aus (62) und (39); (c) = (a) – (b); (d) = (a) + (b), (d) folgt auch mit $z = 1/2$ aus (63).

Aus (20)(a)(b) entsteht die Ableitungsformel

(65) $$\frac{d}{dz}\left[z\cdot ln\,P_{\mu}(z,\lambda) - ln\,P_{\mu-\lambda}(z,\lambda)\right] = ln\,P_{\mu}(z,\lambda)$$

und hiermit gilt nach Integration von (40) und Blick auf (40) und (62)

(66) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)}\cdot\zeta(k)\cdot z^{k+1} = -\int_{0}^{z} ln\,P_0(t,1)dt = -z\cdot ln\,P_0(z,1) + ln\,P_{-1}(z,1)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)\cdot z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = \frac{z}{2}\cdot(ln(2\pi)-1) + \frac{z^2}{2}\cdot(1-\gamma) + z\cdot ln\,\Gamma(1-z) + ln\,G(1-z)$$

$|z| \le 1\ ,\ z \ne 1.$

Für $z = \pm 1/2$ folgen z. B. aus (24) und (39)(b),(c) die Reihen (67)(a),(b).

(67) (a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k\cdot(k+1)\cdot 2^{k}} = -\frac{\gamma}{4} + \frac{7}{12}\cdot ln(2) + ln\sqrt{\pi} - 3\cdot ln\,A$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot\zeta(k)}{k\cdot(k+1)\cdot 2^{k}} = -1 + \frac{\gamma}{4} - \frac{7}{12}\cdot ln(2) + ln\sqrt{\pi} + 3\cdot ln\,A$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2\cdot k)}{k\cdot(2k+1)\cdot 4^{k}} = ln(\pi) - 1\,.$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(k+1)\cdot(2k+1)\cdot 4^{k}} = 2 - \gamma + \frac{7}{3}\cdot ln(2) - 12\cdot ln\,A\,.$

(e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k\cdot(k+1)} = ln\sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{2}$, (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cdot\zeta(k)}{k\cdot(k+1)} = 1 - ln\sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{2}$,

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(k+1)\cdot(2k+1)} = 1 - \gamma$, (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{k\cdot(2k+1)} = ln(2\pi) - 1\,.$

Es ist (c) = (a) + (b), (d) = (a) – (b), (g) = (e) + (f), (h) = (e) – (f).

Für $z=-1$ gilt (67)(f). Die Formel (67)(e) folgt aus (66) durch Grenzübergang $z \to 1$. Die Summe ist konvergent (< 1), die rechte Seite folgt nach Umformung mittels (36) und (202):
$z \cdot ln\,\Gamma(1-z) + ln\,G(1-z) = -(1-z)\cdot ln\,\Gamma(1-z) + ln[\Gamma(1-z)\cdot G(1-z)] \to 0 + ln\,G(2-1) = 0$.

Die Integration der Reihe für $-ln(1-z)$ ergibt $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = -\frac{z^2}{2} + (1-z)\cdot(ln(1-z)-1)$
und unter mehrfacher Verwendung von (36) und (202) (für $z := 1-z$) folgt aus (66):

$$\text{(68)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)}\cdot z^{k+1} = \frac{z}{2}\cdot(ln(2\pi)-3) + \frac{z^2}{2}\cdot(2-\gamma) - (1-z)\cdot ln\,\Gamma(2-z) + ln\,G(2-z)$$

$$|z| \le 2\ ,\ z \ne 2\,.$$

Setze $z=1,\ z=-1,\ z=\pm 1/2,\ z=-2$ und verwende (36), (39)(a), (202), (204):

$$\text{(69)} \quad \text{(a)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot(ln(2\pi)-1-\gamma) \quad \text{(b)} \ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot(ln(32\pi)-5+\gamma)$$

$$\text{(c)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)\cdot 2^k} = \frac{19}{12}\cdot ln(2) + ln\sqrt{\pi} - \frac{3+\gamma}{4} - 3\cdot ln\,A$$

$$\text{(d)} \ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)\cdot 2^k} = -\frac{43}{12}\cdot ln(2) + ln\sqrt{\pi} - \frac{9-\gamma}{4} + 3\cdot ln\,3 + 3\cdot ln\,A$$

$$\text{(e)} \ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(\zeta(k)-1)\cdot 2^k}{k\cdot(k+1)} = \frac{7}{2} - \gamma - \frac{1}{2}\cdot ln(216\cdot\pi)$$

$$\text{(f)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)-1}{k\cdot(2k+1)} = ln(8\cdot\pi)-3 \qquad \text{(g)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)-1}{(k+1)\cdot(2k+1)} = 2-\gamma-2\cdot ln(2)\,.$$

$$\text{(h)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)-1}{k\cdot(2k+1)\cdot 4^k} = ln\left(\frac{27\cdot\pi}{4}\right)-3$$

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)-1}{(k+1)\cdot(2k+1)\cdot 4^k} = \frac{31}{3} ln(2) - 6\cdot ln(3) + 3 - \gamma - 12\cdot ln\,A\,.$$

$$\text{(j)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\zeta(k)-1)\cdot 2^k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot(ln(2\pi)+1) - \gamma$$

Es ist (f) = (a) + (b), (g) = (a) – (b), (h) = (c) + (d), (i) = (c) – (d).

Die Formel (e) folgt aus (68) durch Grenzübergang $z \to 2$. Die Summe ist konvergent (< 2), siehe (214). Die rechte Seite folgt nach Umformung mittels (36) und (202):
$-(1-z)\cdot ln\,\Gamma(2-z) + ln\,G(2-z) = -(2-z)\cdot ln\,\Gamma(2-z) + ln[\Gamma(2-z)\cdot G(2-z)] \to ln\,G(3-2)$.

5. Mehrfachintegration der Bildreihen der Logarithmusfunktion

5.1. Die allgemeine Summenformel

Mittels vollständiger Induktion nach m wird die Ableitungsformel (65) verallgemeinert:

(70) $$\frac{d}{dz}\left[z^m \cdot ln\, P_\mu(z,\lambda) - ln\, P_{\mu-m\cdot\lambda}(z,\lambda)\right] = m \cdot z^{m-1} \cdot ln\, P_\mu(z,\lambda), \qquad m = 1,2,\dots ,$$

bzw. $$\int_0^z m \cdot t^{m-1} \cdot ln\, P_\mu(t,\lambda)\, dt = z^m \cdot ln\, P_\mu(z,\lambda) - ln\, P_{\mu-m\cdot\lambda}(z,\lambda).$$

(Siehe auch **Anhang B**.)

Durch m-fache Integration der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = -ln\, P_\mu(z,\lambda)$ aus (16), (17) und geeignete mehrfache Nutzung von (70) auf der rechten Seite erhält man die Reihendarstellung

(71) $$\underline{\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^{k+m}}{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \cdot \binom{m}{j} \cdot z^{m-j} \cdot H_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda)}\,, \quad m = 1,2,\dots$$

$$\underline{H_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda) = -ln\, P_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda) - \sum_{k=k_j}^{k_0-1} \frac{\zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^{k+j}}{k+j}} \;, \quad k_j = \left[\frac{1-\mu}{\lambda} + j\right]_0 - j + 1,$$

$|z| \le 1,\ z \ne 1$.

Ein direkter Beweis kann erfolgen unter Verwendung der bekannten Partialbruchzerlegung $\frac{m!}{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \cdot \binom{m}{j} \cdot \frac{1}{k+j}$ und anschließender Anwendung von (16), (17) auf die Teilsummen $H_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\zeta[\lambda \cdot (k+j) + (\mu - j \cdot \lambda)] \cdot z^{k+j}}{k+j} \cdot z^{m-j}$.

Man beachte, dass für $-ln\, P_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda)$ *der Laufindex* $k+j$ *mit* $\left[\frac{1-(\mu - j \cdot \lambda)}{\lambda}\right]_0 + 1 \le k_0$ *beginnt.*

Die linke Reihe in (71) ist auch noch konvergent für $z = 1$!
Denn wegen $1 < \zeta(\lambda \cdot k + \mu) < 2$ (für $\lambda \cdot k + \mu \ge 2$, (214)) gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\zeta(\lambda \cdot k + \mu)}{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m)} < \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m)} = \frac{2}{m \cdot m!}.$$

Also kann aus der rechten Seite (nach geeigneter Umformung) der Grenzwert für $z \to 1$ gewonnen werden.

Für $m = 1,\ \mu = 0,\ \lambda = 1$ erhält man als Beispiele die Formeln (66) und (67)(e).

5.2. Ausdrücke für ausgewählte $ln\,P_\mu(z,\lambda)$ und spezielle Grenzwerte

Um die Formel (71) an weiteren Beispielen zu demonstrieren, werden vorbereitend einige Ausdrücke für ausgewählte $ln\,P_\mu(z,\lambda)$ zusammengestellt. Dabei beschränkt sich die Auswahl vorrangig auf Darstellungen, die mit der Gammafunktion und BARNES G-Funktion ermöglicht werden können. Die Formeln finden vorerst nur Anwendung für $|z|<1$.

(72) (a) $$ln\,P_\mu(z,1)=ln(1-z)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot ln\left(1-\frac{z}{n}\right),\quad \mu>0 \qquad (21)(a)$$

(b) $$ln\,P_\mu\left(z^2,2\right)=ln\,P_\mu(z,1)+ln\,P_\mu(-z,1)=ln\left(1-z^2\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (19)$$

(c) $$ln\,P_0(z,1)=\gamma\cdot z-ln\,\Gamma(1-z) \qquad (24)$$

(d) $$ln\,P_0\left(z^2,2\right)=-ln\,\Gamma(1-z)-ln\,\Gamma(1+z)\;=ln\frac{sin(\pi\cdot z)}{\pi\cdot z}\quad (z\neq 0) \qquad (26)$$

(e) $$ln\,P_{-1}(z,1)=ln\,G(1-z)+\frac{z}{2}\cdot(ln(2\pi)-1)+\frac{z^2}{2}(1+\gamma) \qquad (35)$$

(f) $$ln\,P_{-1}\left(z^2,2\right)=ln\,P_{-1}(z,1)+ln\,P_{-1}(-z,1) \qquad (19)$$
$$=ln\,G(1+z)+ln\,G(1-z)+z^2\cdot(1+\gamma)$$

(g) $$ln\,P_{-2}(z,1)=z\cdot ln\,P_{-1}(z,1)-\int_0^z ln\,P_{-1}(t,1)dt \qquad (70)$$
$$=z\cdot ln\,G(1-z)+\frac{z^2}{4}\cdot(ln(2\pi)-1)+\frac{z^3}{3}(1+\gamma)-\int_0^z ln\,G(1-t)dt$$

(h) $$ln\,P_{-2}\left(z^2,2\right)=ln\,P_{-2}(z,1)+ln\,P_{-2}(-z,1) \qquad (19)$$
$$=z\cdot(ln\,G(1-z)-ln\,G(1+z))+\frac{z^2}{2}\cdot(ln(2\pi)-1)-\int_0^z ln\,G(1-t)dt-\int_0^{-z} ln\,G(1-t)dt$$

Im Abschnitt **5.3. Beispiele** werden Konstanten $C_{i,j}:=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2\cdot n+j)^{i-1}}{n^i\cdot(n+j)^i}\cdot ln(n)$ verwendet:

(73)
$$C_{1,-1}=1{,}257\ 746\ 886\ 9\ldots,\quad C_{1,0}=0{,}937\ 548\ 254\ 3\ldots,\quad C_{1,1}=0{,}788\ 530\ 565\ 9\ldots$$
$$C_{2,-1}=0{,}863\ 206\ 801\ 6\ldots,\quad C_{2,0}=0{,}396\ 252\ 485\ 7\ldots,\quad C_{2,1}=0{,}262\ 724\ 370\ 8\ldots$$
$$ln(A)=\frac{1}{2\pi^2}\cdot C_{1,0}+\frac{1}{12}\cdot(ln(2\pi)+\gamma)=0{,}248\ 754\ 477\ 0\ldots,\quad C_{i,0}=-2^{i-1}\cdot\zeta'(i+1)$$

Für $z=\pm1$ gelten nach BARNES folgende Integralwerte, siehe z. B. [S/C: 1.3. bzw. 3.4.]:

(74) $$\int_0^{\pm1} ln\,G(1-t)dt=-\frac{1}{4}\cdot ln(2\pi)\pm\frac{1}{12}\mp 2\cdot ln(A)\;.$$

5.3. Beispiele

Für $\mu \le 1$ ist in (71) $k_j = k_0,\ j = 0,\ldots,m$; damit sind die Summen in den $H_{\mu-j\cdot\lambda}(z,\lambda)$ leer.

$m=1,\ \mu=0,\ \lambda=1,\ k_j=2$.
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)\cdot z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = -z\cdot \ln P_0(z,1) + \ln P_{-1}(z,1) \qquad = (66)\ !$$

$$(75)\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)\cdot z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = \frac{z}{2}\cdot(\ln(2\pi)-1) + \frac{z^2}{2}\cdot(1-\gamma) - (1-z)\cdot \ln\Gamma(1-z) + \ln G(2-z) \quad ,\ |z|\le 1\ .$$

Diese Reihe wurde ausführlich auf den Seiten 15 f. behandelt. Man beachte die Umformung $z\cdot \ln\Gamma(1-z) + \ln G(1-z) = -(1-z)\cdot \ln\Gamma(1-z) + \ln\Gamma(1-z) + \ln G(1-z)$ mit (36).
Ähnliche Umformungen werden noch mehrfach verwendet, um den Grenzübergang $z \to \pm 1$ aus den (dann eventuell nicht so eleganten) Formeln direkt ablesen zu können.

$m=1,\ \mu=1,\ \lambda=1,\ k_j=1$.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = -z\cdot \ln P_1(z,1) + \ln P_0(z,1).$$

$$(76)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+1}}{k\cdot(k+1)} = \gamma\cdot z + (1-z)\cdot \ln(1-z) - \ln\Gamma(2-z) - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z}{n}\cdot \ln\left(1-\frac{z}{n}\right),$$
$|z|\le 1,\ z\ne 1$.

$m=1,\ \mu=1,\ \lambda=2,\ k_j=1,\ z:=z^2$.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)\cdot z^{2k+2}}{k\cdot(k+1)} = -z^2\cdot \ln P_1\left(z^2,2\right) + \ln P_{-1}\left(z^2,2\right).$$

$$(77)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)\cdot z^{2k+2}}{k\cdot(k+1)} =$$
$$= z^2\cdot(1+\gamma) + \left(1-z^2\right)\cdot \ln\left(1-z^2\right) + \ln\frac{G(2-z)}{\Gamma(2-z)} + \ln\frac{G(2+z)}{\Gamma(2+z)} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n}\cdot \ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$
$|z|\le 1\ ,\ z\ne \pm 1$.

$m=1,\ \mu=0,\ \lambda=2,\ k_j=1,\ z:=z^2$.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)\cdot z^{2k+2}}{k\cdot(k+1)} = -z^2\cdot \ln P_0\left(z^2,2\right) + \ln P_{-2}\left(z^2,2\right).$$

$$(78)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)\cdot z^{2k+2}}{k\cdot(k+1)} = z\cdot(z-1)\cdot \ln\Gamma(1-z) + z\cdot(z+1)\cdot \ln\Gamma(1+z) + \frac{z^2}{2}\cdot(\ln(2\pi)-1) + \ldots$$
$$\ldots + z\cdot \ln\frac{G(2-z)}{G(2+z)} - \int_0^{z}\ln G(1-t)\,dt - \int_0^{-z}\ln G(1-t)\,dt$$
$|z|\le 1\ ,\ z\ne \pm 1$.

Unter Beachtung der Grenzübergänge $(1-z)\cdot ln(1-z)\to 0$ bzw. $(1-z)\cdot ln\Gamma(1-z)\to 0$ für $z\to 1$ (202) und der Beziehungen $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-C_{1,1}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=C_{1,-1}$ ergeben sich für $z=\pm 1$ aus (76) – (78) mit (74) die speziellen Reihen

(79) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+1)}{k\cdot(k+1)}=\gamma+C_{1,1}$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot\zeta(k+1)}{k\cdot(k+1)}=-\gamma+C_{1,-1}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)}{k\cdot(k+1)}=1+\gamma+C_{1,1}-C_{1,-1}$, (d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k\cdot(k+1)}=ln(2\pi)-\frac{1}{2}$,

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+1)}{k\cdot(2k+1)}=2\cdot\gamma+C_{1,1}-C_{1,-1}$, (f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{(k+1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{2}$.

Es ist (79)(e) = (67)(e) – (79)(c) und (79)(f) = (67)(f) – (79)(d). *Vergleiche mit* (67)(e)–(h)!

$m=2,\ \mu=0,\ \lambda=1,\ k_j=2$.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=-\frac{z^2}{2}\cdot ln\,P_0(z,1)+z\cdot ln\,P_{-1}(z,1)-\frac{1}{2}\cdot ln\,P_{-2}(z,1)$$

(80)
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{z^3}{6}\cdot(2-\gamma)+\frac{3\cdot z^2}{8}\cdot(ln(2\pi)-1)+\frac{z^2-z}{2}ln\Gamma(1-z)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z}{2}\cdot ln\,G(2-z)+\frac{1}{2}\cdot\int_0^z ln\,G(1-t)dt$$

$|z|\le 1,\ z\ne 1$.

$m=2,\ \mu=1,\ \lambda=1,\ k_j=1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=-\frac{z^2}{2}\cdot ln\,P_1(z,1)+z\cdot ln\,P_0(z,1)-\frac{1}{2}\cdot ln\,P_{-1}(z,1)$$

(81)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{z^2}{4}\cdot(3\cdot\gamma-1)-\frac{z}{4}\cdot(ln(2\pi)-1)+\frac{z-z^2}{2}ln(1-z)+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{1-z}{2}\cdot ln\Gamma(1-z)-\frac{z}{2}\cdot ln\Gamma(2-z)-\frac{1}{2}\cdot ln\,G(2-z)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n}\cdot ln\left(1-\frac{z}{n}\right)$$

$|z|\le 1,\ z\ne 1$.

$m=2,\ \mu=2,\ \lambda=1,\ k_0=1,\ k_1=k_2=0$ **!**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+2)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=-\frac{z^2}{2}\cdot ln\,P_2(z,1)+z\cdot\left[ln\,P_1(z,1)+\zeta(2)\cdot z\right]-\frac{1}{2}\cdot\left[ln\,P_0(z,1)+\frac{\zeta(2)}{2}\cdot z^2\right]$$

(82)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(k+2)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{3}{4}\cdot\zeta(2)\cdot z^2-\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot z-\frac{(1-z)^2}{2}ln(1-z)+\frac{1}{2}\cdot ln\,\Gamma(2-z)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n}\cdot ln\left(1-\frac{z}{n}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z}{n}\cdot ln\left(1-\frac{z}{n}\right)$$

$|z|\le 1,\ z\ne 1$.

$m=2,\ \mu=2,\ \lambda=2,\ k_0=1,\ k_1=k_2=0,\ \ z:=z^2$ **!**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+2)\cdot z^{2k+4}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=$$
$$-\frac{z^4}{2}\cdot ln\,P_2\left(z^2,2\right)+z^2\cdot\left[ln\,P_0\left(z^2,2\right)+\zeta(2)\cdot z^2\right]-\frac{1}{2}\cdot\left[ln\,P_{-2}\left(z^2,2\right)+\frac{\zeta(2)}{2}\cdot z^4\right]$$

(83)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k+2)\cdot z^{2k+4}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{3}{4}\cdot\zeta(2)\cdot z^4-\frac{z^2}{4}\cdot(ln(2\pi)-1)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^4}{n^2}\cdot ln\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2}\cdot\int_0^{z}lnG(1-t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{-z}ln\,G(1-t)\,dt+R\ .$$

$|z|\le 1\ ,\ z\ne\pm 1$.

$$R\ =-\frac{z^4}{2}\cdot ln\left(1-z^2\right)-z^2\cdot ln[\Gamma(1-z)\cdot\Gamma(1+z)]-\frac{z}{2}\cdot ln\,G\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$
$$=\frac{z^2\cdot\left(1-z^2\right)}{2}\cdot ln\left(1-z^2\right)+\frac{z\cdot(1-z)}{2}\cdot ln\,\Gamma(1-z)-\frac{z(1+z)}{2}\cdot ln\,\Gamma(1+z)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{z^2}{2}\cdot(ln\,\Gamma(2-z)+ln\,\Gamma(2+z))-\frac{z}{2}\cdot(ln\,G(2-z)-ln\,G(2+z))$$

Analog zu (79) und den Beziehungen $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-C_{2,1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=C_{2,-1}$ ergeben sich für $z=\pm 1$ aus (80) – (83) z. B. die folgenden speziellen Reihen:

(84) (a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{4}\cdot ln(2\pi) - \frac{1}{6}\cdot\gamma - ln(A)$$

(b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot\zeta(k)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{4}\cdot(ln(2\pi)-3) + \frac{1}{6}\cdot\gamma + ln(A)$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = -\frac{1}{4}\cdot ln(2\pi) + \frac{3}{4}\cdot\gamma + \frac{1}{2}\cdot C_{1,1}$$

(d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot\zeta(k+1)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{4}\cdot(ln(2\pi)-2) + \frac{3}{4}\cdot\gamma - \frac{1}{2}\cdot C_{1,-1}$$

(e) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+2)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{3}{4}\cdot\zeta(2) - \frac{1}{2}\cdot\gamma + \frac{1}{2}\cdot C_{2,1} - C_{1,1}$$

(f) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot\zeta(k+2)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{3}{4}\cdot\zeta(2) + \frac{1}{2}\cdot\gamma - \frac{1}{2}\cdot C_{2,-1} - C_{1,-1}$$

(g) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+2)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{3}{4}\cdot\zeta(2) - \frac{1}{2}\cdot ln(2\pi) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(C_{2,1} - C_{2,-1})$$

(h) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)} = ln(2\pi) - \frac{3}{2}$$

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(k+1)\cdot(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\cdot\gamma - 2\cdot ln(A)$$

(j) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot\zeta(k+1)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = -\frac{1}{2}\cdot ln(2\pi) + \frac{11}{12}\cdot\gamma + ln(A) + \frac{1}{2}\cdot C_{1,1}$$

(k) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot\zeta(2k+2)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)} = \frac{13}{12}\cdot\zeta(2) - \frac{5}{2}\cdot ln(2\pi) + \frac{13}{4} + \frac{1}{2}\cdot(C_{2,1} - C_{2,-1})$$

(l) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)}{k\cdot(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot ln(2\pi) + \frac{1}{4}\cdot\gamma + \frac{1}{2}C_{1,1}$$

(m) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+2)}{k\cdot(k+1)} = \zeta(2) + C_{2,1} - C_{1,1}$$

(n) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot\zeta(k+1)}{k\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{1}{4}\cdot ln(2\pi) - \frac{5}{12}\cdot\gamma - 2\cdot ln(A) + \frac{1}{2}C_{1,1}$$

Es ist (h) = (a) + (b), (i) = (a) – (b), (j) = (c) – (a), (k) = (g) – 2(h), (l) = (c) + (67)(e), (m) = 2(e) +(67)(e), (n) = ((j) + 3(a).

Mit der Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)}\right] = \frac{1}{m!}$$

erhält man z. B. aus (84)(a), (c), (j) die Differenzenreihen

(85) (a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{4}\cdot ln(2\pi) - \frac{1}{6}\cdot\gamma - ln(A) - \frac{1}{12}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)-1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = -\frac{1}{4}\cdot ln(2\pi) + \frac{3}{4}\cdot\gamma + \frac{1}{2}\cdot C_{1,1} - \frac{1}{4}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot(\zeta(k+1)-1)}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = -\frac{1}{2}\cdot ln(2\pi) + \frac{11}{12}\cdot\gamma + ln(A) + \frac{1}{2}\cdot C_{1,1} - \frac{1}{6}$$

5.4. Rekursive Erzeugung von Bildreihen

In (84) wurde mehrfach (für $z = 1$) die Identität

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\zeta(k+\mu)\cdot z^{k+m}\cdot(k+i)}{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\zeta(k+\mu-1)\cdot z^{k+m-1}}{k\cdot(k+1)\ldots\cdot(k+m-1)} + i\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{\zeta(k+\mu)\cdot z^{k+m}}{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)}$$

verwendet. Sie erlaubt es insbesondere, Summen mit m Nennerfaktoren auf solche mit $m-1$ Faktoren zurückzuführen. Durch den rekursiven Ansatz mit $i = m$ kann beispielsweise die Summenformel (71) umgangen werden.
So gewinnt man aus der Kenntnis von (80) und (81) mit $i = m = 3$ in der Identität den Ansatz

$$3\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+3}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1)\cdot z^{k+2}\cdot z}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)\cdot z^{k+2}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = z\cdot(81) - (80)$$

und damit die Summenformel

(86) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot\zeta(k+1)\cdot z^{k+3}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} =$$

$$= \frac{z^3}{12}\cdot(11\cdot\gamma-7) - \frac{5}{8}\cdot z^2\cdot(ln(2\pi)-1) + \frac{z^2-z^3}{2}\cdot ln(1-z) + \left(z-z^2\right)\cdot ln\Gamma(1-z) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{z^2}{2}\cdot ln\Gamma(2-z) - z\cdot lnG(2-z) - \frac{z^3}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot ln\left(1-\frac{z}{n}\right) - \frac{1}{2}\cdot\int_0^z lnG(1-t)$$

$$|z| \le 1,\ z \ne 1\ .$$

Für $z = 1$ folgt hieraus (84)(j).

Zu empfehlen ist ein Vergleich mit den auf anderem Wege gewonnenen Ergebnissen von Wu Yun-Fei [wu].

6. Bildfunktionen der Area- und Arkustangensreihen

6.1. Die allgemeine Lösung

Für die Originalreihen $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{k-1}}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=\begin{cases} ar\,tanh(z) \\ arctan(z)\end{cases}$ werden die Bildfunktionen der Bildreihen $F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)+\mu]\cdot z^{2\cdot k-1}$ gesucht.

Wegen $ar\,tanh(z)=\frac{1}{2}\cdot ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot[ln(1+z)-ln(1-z)]$ folgt aus (16), (17) mit den 3. Transformationsregeln R(2), R(3) die Zuordnung

$$(87)\qquad ar\,tanh(z)\;\bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)+\mu]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}+\frac{1}{2}ln\frac{P_\mu(-z,\lambda)}{P_\mu(z,\lambda)}$$

$$k_0=min\{k\geq 0\ |\ \lambda\cdot(2k-1)+\mu>1\}=\left[\frac{\lambda+1-\mu}{2\cdot\lambda}\right]_0+1\ ;\ |z|\leq 1,\ z\neq\pm 1\ .$$

Mit Hilfe der komplexen Darstellung $arctan(z)=\frac{1}{i}ar\,tanh(i\cdot z)$ folgt aus (87) analog

$$(88)\qquad arctan(z)\;\bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{(-1)^{k-1}\zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)+\mu]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}+\frac{1}{2\cdot i}ln\frac{P_\mu(-i\cdot z,\lambda)}{P_\mu(i\cdot z,\lambda)}$$

$$|z|\leq 1,\ z\neq\pm\, i\ .$$

6.2. Der Spezialfall $\mu=0,\ \lambda=1$

Für $f(z)=ar\,tanh(z)$ folgt aus (87) und (24)

$$F_{1,0}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=\zeta_*(1)\cdot z+\frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{e^{-\gamma\cdot z}}{\Gamma(1+z)}\cdot\frac{\Gamma(1-z)}{e^{\gamma\cdot z}}\right)=\frac{1}{2}\cdot ln\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1+z)},$$

d. h. die Bildreihe

$$(89)\qquad \underline{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=-\gamma\cdot z+\frac{1}{2}\cdot ln\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1+z)}}\ ,\ \ |z|\leq 1,\ z\neq\pm 1\ .$$

Diese Reihe erhält man auch einfach durch Subtraktion der Reihen (40) mit den Argumenten *z* und *–z* !
Es bestehen weitere Verbindungen zum Abschnitt **4.5.**:
Aus (89) folgt für $z=1/2$ die Reihe (56)(d); die Reihe (48) ist die Ableitung von (89); usw. .

Für $f(z) = arctan(z)$ folgt aus (88) und (24)

$$F_{1,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1} = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot ln \frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}$$

d. h. die Bildreihe

$$(90) \qquad \underline{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1} = \gamma \cdot z - \frac{1}{2 \cdot i} \cdot ln \frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}}, \quad |z| \le 1,\ z \ne \pm\, i\ .$$

Mit Beschränkung auf reelle $z = x$ folgt aus $\Gamma(1-i\,x) = \overline{\Gamma(1+i\,x)}$ für die Beträge und die Argumente: $|\Gamma(1-i\,x)| = |\Gamma(1+i\,x)|$ und $arg\,\Gamma(1-i\,x) = -arg\,\Gamma(1+i\,x)$.
Für den Quotienten gilt also $\dfrac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)} = 1 \cdot e^{-2 \cdot arg\,\Gamma(1+i \cdot x) \cdot i}$ und (90) erhält die Form

$$(91) \qquad \underline{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1} \cdot x^{2 \cdot k-1} = \gamma \cdot x + arg\,\Gamma(1+ix)}, \quad -1 \le x \le 1\ .$$

Da die Logarithmusreihe den <u>Hauptwert</u> $ln(1-z)$ des Logarithmus darstellt, gilt für das Argument φ : $-\pi < \varphi \le \pi$.

(91) liefert eine Reihendarstellung des Arguments von $\Gamma(1+ix)$ mit Hilfe der Zetawerte:

$$(92) \qquad arg\,\Gamma(1+ix) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta_*(2k-1)}{2k-1} \cdot x^{2 \cdot k-1}\ .$$

Nach (211)(a), (b) gelten für das Argument auch die Reihendarstellungen

$$(93) \qquad arg\,\Gamma(1+i\,x) = -\gamma \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - arctan \frac{x}{n} \right] = \lim_{m \to \infty} \left[x \cdot ln(m) - \sum_{n=1}^{m} arctan \frac{x}{n} \right].$$

Im Abschnitt **6.6.** wird auf (92) und (93) im allgemeineren Zusammenhang eingegangen.

6.3. Die Spezialfälle $\mu = 0,\ \lambda > 1$

Da $k_0 = 1$ ist, entfällt in (87) und (88) die (leere) Summe. Das im verbleibenden Quotienten auftretende Produkt $P_0(z, \lambda > 1)$ kann nach (30) als Reihe mit den Koeffizienten $a_k(\lambda)$ dargestellt werden: $P_0(z, \lambda > 1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k(\lambda) \cdot z^k$

Durch Zerlegung dieser Reihe in Teilreihen erhält man spezielle Formeln für Bildreihen.

Es werden folgende Reihen definiert:

(94) (a) $u_1(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cdot z^{2k-1}$ (b) $v_1(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cdot z^{2k}$

(c) $u_2(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-1} \cdot z^{2k-1}$ (d) $v_2(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_{2k} \cdot z^{2k}$.

Daraus ergeben sich die Darstellungen

(95) (a) $P_0(z,\lambda) = v_1(z,\lambda) - u_1(z,\lambda)$ (b) $P_0(-z,\lambda) = v_1(z,\lambda) + u_1(z,\lambda)$

(c) $P_0(i \cdot z,\lambda) = v_2(z,\lambda) - i \cdot u_2(z,\lambda)$ (d) $P_0(-i \cdot z,\lambda) = v_2(z,\lambda) + i \cdot u_2(z,\lambda)$.

(c) und (d) folgen aus (a) und (b) wegen $i \cdot u_2(z,\lambda) = u_1(i \cdot z,\lambda)$ und $v_2(z,\lambda) = v_1(i \cdot z,\lambda)$.

Durch Umformungen von (95) erhält man anderseits die Beziehungen

(96) (a) $2 \cdot v_1(z,\lambda) = P_0(-z,\lambda) + P_0(z,\lambda)$ (b) $2 \cdot u_1(z,\lambda) = P_0(-z,\lambda) - P_0(z,\lambda)$

(c) $2 \cdot v_2(z,\lambda) = P_0(-i \cdot z,\lambda) + P_0(i \cdot z,\lambda)$ (d) $2 \cdot i \cdot u_2(z,\lambda) = P_0(-i \cdot z,\lambda) - P_0(i \cdot z,\lambda)$

(e) $v_1(z,\lambda)^2 - u_1(z,\lambda)^2 = P_0(-z,\lambda) \cdot P_0(z,\lambda) = P_0\left(z^2, 2 \cdot \lambda\right)$

(f) $v_2(z,\lambda)^2 + u_2(z,\lambda)^2 = P_0(-i \cdot z,\lambda) \cdot P_0(i \cdot z,\lambda) = P_0\left((i \cdot z)^2, 2 \cdot \lambda\right) = P_0\left(-z^2, 2 \cdot \lambda\right)$.

Mit Hilfe von (95) werden die logarithmischen Ausdrücke durch den Tangens ausgedrückt:

$$ln \frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} = ln \frac{v_1 + u_1}{v_1 - u_1} = ln \frac{1 + u_1/v_1}{1 - u_1/v_1} = 2 \cdot ar\,tanh \frac{u_1(z,\lambda)}{v_1(z,\lambda)}$$

$$ln \frac{P_0(-i \cdot z,\lambda)}{P_0(i \cdot z,\lambda)} = ln \frac{1 + i \cdot u_2/v_2}{1 - i \cdot u_2/v_2} = 2 \cdot ar\,tanh\left(i \cdot \frac{u_2}{v_2}\right) = 2 \cdot i \cdot arctan \frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)}.$$

Damit ergeben sich aus (87) und (88) die Zuordnungen

(97) $ar\,tanh(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda>1,\mu=0} ar\,tanh \frac{u_1(z,\lambda)}{v_1(z,\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_*[\lambda \cdot (2k-1)]}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1}$,

$|z| \le 1$, $z \ne \pm 1$,

(98) $arctan(z) \bullet\!\xrightarrow{\lambda>1,\mu=0} arctan \frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta_*[\lambda \cdot (2k-1)]}{2k-1} \cdot z^{2 \cdot k-1}$,

$|z| \le 1$, $z \ne \pm\, i$.

6.4. Anwendung auf den Spezialfall $\mu = 0,\ \lambda = 2$

Aus (25) $P_0\left(z^2,2\right) = \frac{sin(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$, $P_0(0,2) = 1$ und den Folgerungen

(99) (a) $P_0\left(-z^2,2\right) = P_0\left((i \cdot z)^2,2\right) = \frac{sin(\pi \cdot i \cdot z)}{\pi \cdot i \cdot z} = \frac{sinh(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$

(b) $P_0\left(i \cdot z^2,2\right) = P_0\left((\varepsilon \cdot z)^2,2\right) = \frac{sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{\pi \cdot \varepsilon \cdot z}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i)$, $\varepsilon^2 = i$

(c) $P_0\left(-i \cdot z^2,2\right) = P_0\left((i \cdot \varepsilon \cdot z)^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{\pi \cdot \varepsilon \cdot z}$

ergeben sich aus (96)(a)–(d) die speziellen Beziehungen

(100) (a) $v_1\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot z) + sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z}$ (c) $v_2\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) + sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot z}$

(b) $u_1\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot z) - sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z}$ (d) $u_2\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) - sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \varepsilon \cdot z}$

Wendet man in (c), (d) die Additionstheoreme auf das komplexe Argument an und benutzt die Beziehungen zwischen den Hyperbel- und Kreisfunktionen, so kann ε eliminiert werden:

$$sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) = sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + i \cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)$$

$$sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) = sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) + i \cdot cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right) \cdot sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right).$$

Diese Ausdrücke werden in (100)(c)+(d) eingesetzt, so dass nach entsprechendem Kürzen gilt

(100) (c‘) $v_2\left(z^2,2\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot z} \cdot S_+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)$ (d‘) $u_2\left(z^2,2\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot z} \cdot S_-\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot z\right)$

$S_\pm(\mathrm{z}) := sin(z) \cdot cosh(z) \ \pm \ cos(z) \cdot sinh(z).$

Mit (25) bzw. (100) entstehen aus (87), (88) bzw. (97), (98) schließlich die Bildreihen

(101) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(4k-2)}{2k-1} \cdot z^{4 \cdot k - 2} = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{sinh(\pi \cdot z)}{sin(\pi \cdot z)} = ar\,tanh \frac{sinh(\pi \cdot z) - sin(\pi \cdot z)}{sinh(\pi \cdot z) + sin(\pi \cdot z)},$$

$|z| \leq 1$, $z^2 \neq 0, \pm 1$.

(102) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{\zeta(4k-2)}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}=\arctan\frac{\sin(w)\cdot\cosh(w)\;-\;\cos(w)\cdot\sinh(w)}{\sin(w)\cdot\cosh(w)\;+\;\cos(w)\cdot\sinh(w)},$$
$$w=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z,\;\; |z|\le 1\,,\; z^2\ne 0,\pm i\,.$$

Subtrahiert man von den Reihen (101) bzw. (102) die Originalreihen

$$\operatorname{artanh}\left(z^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+z^2}{1-z^2}\qquad\text{bzw.}\qquad \arctan\left(z^2\right),$$

so folgen nach einigen Umformungen die entsprechenden Differenzenreihen

(103) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{(1-z^2)\cdot\sinh(\pi\cdot z)}{(1+z^2)\cdot\sin(\pi\cdot z)},\qquad |z|\le 2\,,\; z^2\ne 0,\pm 4\,.$$

(104) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{\zeta(4k-2)-1}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}=\arctan\frac{(1-z^2)\cdot\tan(w)-(1+z^2)\cdot\tanh(w)}{(1+z^2)\cdot\tan(w)+(1-z^2)\cdot\tanh(w)},$$
$$w=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z,\;\; |z|\le 2\,,\; z^2\ne 0,\pm 4i\,.$$ Für negative *arctan* - Werte ist π zu addieren!

Man achte auf den Konvergenzradius $R=2^{\lambda}\cdot r=4\cdot 1$ *für* z^2 !

Für die speziellen z–Werte $z=1/2,\;1/6,\;1,\;3/2$ erhält man aus (101), (103) folgende Reihen:

(105) (a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 4^{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ (b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1)\cdot 4^{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{3}{5}\cdot\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 36^{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[2\cdot\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

(d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1)\cdot 36^{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{70}{37}\cdot\sinh\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

(e) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1)}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\right]$$

(f) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1)}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{4k-2}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left[\frac{5}{13}\cdot\sinh\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\right]$$

Für (e) wurde der Grenzwert $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1-z^2}{\sin(\pi\cdot z)}=\dfrac{2}{\pi}$ verwendet.

Aus (102) und (104) ergeben sich für $z = 1/\sqrt{2}\,,\ 1/\left(2\sqrt{2}\right),\ \sqrt{2}\,,\ 5/4\cdot\sqrt{2}$

(106) (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}=\frac{\pi}{4}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 8^{2k-1}}=arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot[\zeta(4k-2)-1]}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}=arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot[\zeta(4k-2)-1]}{(2k-1)}\cdot 2^{2k-1}=arctan(3)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot[2-\zeta(4k-2)]}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}=arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot[\zeta(4k-2)-1]}{(2k-1)}\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^{2k-1}=arctan\left(\frac{-17-33\cdot tanh\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\right)}{33-17\cdot tanh\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\right)}\right)+\pi\,.$

Anmerkungen zu (106) :

Die Reihe (a) kann auch aus folgender Eigenschaft des Arkustangens gewonnen werden:

Es gilt wegen $arctan\dfrac{1}{2\cdot n^2}=arctan\dfrac{n}{n+1}-arctan\dfrac{n-1}{n}$ die Summenformel

(107) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}arctan\frac{1}{2\cdot n^2}=arctan\frac{m}{m+1}\to arctan(1)$ für $m\to\infty$.

Folglich ist $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{2k-1}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot n^2}\right)^{2k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{2\cdot n^2}=\frac{\pi}{4}\,.$$

In (b) wird $cosh\left(\frac{\pi}{4}\right)\pm sinh\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\pm\frac{\pi}{4}}$ verwendet. Für (c) wird in der Formel (104) der Bruch vorher mit $cos(w)$ erweitert. (e) = (a) –2(c) ist eine der vielen Arkustangensformeln.

Das allgemeine Glied der alternierenden Reihen (102), (104) lässt sich nach (214) wie folgt abschätzen: $\dfrac{\zeta(4k-2)-1}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}<\dfrac{4}{2k-1}\cdot\left(\dfrac{z^2}{4}\right)^{2k-1}$.

Der Fehler zur Reihensumme ist also kleiner als diese Schranke, wenn die Reihe nach dem k-ten Glied abgebrochen wird.
Zum Beispiel können die Reihen (c) bzw. (d) nach dem 4. bzw. 10. Glied abgebrochen werden, wenn eine Genauigkeit von mindestens 6 Stellen verlangt wird.

6.5. Die Bildfunktionen des Arkustangens als Grenzwerte

In dem Abschnitt **6.1.** wurden die Bildreihen des Arkustangens auf die des Logarithmus zurückgeführt. In diesem Abschnitt werden direkt die grundlegenden Beziehungen (8) bis (10) bzw. die 3. Transformationsregeln R(9) verwendet, um die Bildfunktionen aufzustellen. Einschränkend wird diese Grenzwertbildung jedoch nur für den Fall $\underline{\mu = 0}$ diskutiert.

Nach **3.** R(9) erhält man für

$$g(z) = arctan(z) - \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot z^{2\cdot k-1} \ , \quad k_0 = min\big(k \,|\, (2k-1)\cdot \lambda > 1\big) = \left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right] + 1$$

die Bildfunktion $G_{\lambda,0}(z) =: A_0(z,\lambda)$ als Grenzwert

$$(108) \quad A_0(z,\lambda) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[arctan\frac{z}{n^{\lambda}} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)^{2k-1} \right], \ |z| \le 1 \ , \ z \ne \pm i \, .$$

Damit lautet die Transformationsformel für die Arkustangensreihe

$$arctan(z) \xrightarrow{\lambda,0} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right]} \frac{(-1)^{k-1} \zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1} \cdot z^{2\cdot k-1} + A_0(z,\lambda) \ , \quad |z| \le 1 \ , \ z \ne \pm i \, .$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \zeta_*[\lambda\cdot(2k-1)] \cdot z^{2\cdot k-1} \, .$$

Die Bildreihen haben die Form

$$(109) \quad \underline{\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \zeta[\lambda\cdot(2k-1)] \cdot z^{2\cdot k-1} = A_0(z,\lambda)} \ , \quad k_0 = \left[\frac{1+\lambda}{2\cdot\lambda}\right] + 1, \ |z| \le 1 \ , \ z \ne \pm i \, .$$

Für den Grenzwert $A_0(z,\lambda)$ gelten offensichtlich folgende Beziehungen:

(110) (1) $A_0(-z,\lambda) = -A_0(z,\lambda)$

(2) $A_0(z,\lambda) = \frac{1}{2i} \cdot ln \frac{P_0(-iz,\lambda)}{P_0(iz,\lambda)}$; $P_0(iz,\lambda)\cdot e^{2i\cdot A_0(z,\lambda)} = P_0(-iz,\lambda)$ (88)

(3) $A_0(x,\lambda) = arg\, P_0(-ix,\lambda) = arg(ln\, P_0(-ix,\lambda))$ für reelles x.

(3) *folgt aus* (2), *denn* $P_0(ix,\lambda) = \overline{P_0(-ix,\lambda)}$ *und* $ln\big(r\cdot e^{i\varphi}\big) = ln\, r + i\varphi$.

6.6. Grenzwerte $A_0(z,\lambda)$ und Bildreihen für spezielle $\lambda-$Werte

Sei $\underline{\lambda > 1}$. Dann ist $k_0 - 1 = \left[\frac{1+1/\lambda}{2}\right] = 0$ und die „Korrektursumme“ in (108) ist leer.

Es folgen nach (109) die Reihendarstellungen

$$(111)\qquad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = A_0(z,\lambda>1) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{z}{n^{\lambda}}}\quad,\ |z|\le 1,\ z\ne \pm\, i\ .$$

insbesondere

$$(112)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{\zeta(4k-2)}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2} = A_0\left(z^2,2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{z^2}{n^2}\ ,\quad A_0\left(\frac{1}{2},2\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Man vergleiche mit (102) *und* (107) !

Sei $\underline{\frac{1}{3} < \lambda \le 1}$. Dann ist $k_0 - 1 = \left[\frac{1+1/\lambda}{2}\right] = 1$. Das ergibt nach (109) die Reihendarstellung

$$(113)\qquad \underline{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\frac{\zeta[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = -A_0(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n^{\lambda}} - arctan\frac{z}{n^{\lambda}}\right)}\quad |z|\le 1,\ z\ne\pm\, i\ .$$

Insbesondere gilt für reelle x nach (93) bzw. (110)(3)

$$(114)\quad (a)\quad -A_0(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - arctan\frac{x}{n}\right) = \gamma\cdot x + arg\,\Gamma(1+i\,x) = \gamma\cdot x - arg\,\Gamma(1-i\,x)$$

$$(b)\quad -A_0\left(x,\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - arctan\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = -\,arg\,P_0\left(-i\,x,\frac{1}{2}\right)$$

Übrigens erhält man aus (19) *und* (24) *für* $P_0\left(-i\cdot x,\frac{1}{2}\right)$ *zum Argument* (b*) auch den Betrag*

$$(c)\quad \left|P_0\left(-i\cdot x,\frac{1}{2}\right)\right|^2 = P_0\left(-i\cdot x,\frac{1}{2}\right)\cdot P_0\left(i\cdot x,\frac{1}{2}\right) = P_0\left(-x^2,1\right) = \frac{e^{-\gamma\cdot x^2}}{\Gamma\left(1+x^2\right)}\,,$$

$$(d)\quad \underline{P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{\gamma}{2}-\eta\cdot i}}\qquad mit\ \ \eta := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.697428\ldots\,.$$

Eine geometrische Deutung von (d) *wird im* Anhang C *gegeben.*

Abschließend einige speziellen Bildreihen (vgl. auch (91)):

(115) (a) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1} = -A_0(1,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - arctan\frac{1}{n}\right) = \gamma - arg\,\Gamma(1-i) \approx 0.275575...$$

(b) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot\frac{1}{4^{k-1}} = -2\cdot A_0\left(\frac{1}{2},1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - 2\cdot arctan\frac{1}{2n}\right)$$
$$= \gamma - 2\cdot arg\,\Gamma\left(1-\frac{i}{2}\right) \approx 0.089099...$$

(c) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right] = -A_0\left(1,\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \eta \approx 0.697428...$$

(d) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right]\cdot\frac{1}{4^{k-1}} = -2\cdot A_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\cdot arctan\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$
$$= -2\cdot arg\,P_0\left(-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right) \approx 0.203062$$

Zweimaliges Anwenden des Additionstheorems für den Arkustangens ergibt die Identität

$2\cdot arctan\frac{1}{2\cdot a} - arctan\frac{1}{a} = arctan\frac{1}{a\cdot\left(4\cdot a^2+3\right)}$. Daraus folgen aus (113) die Beziehung

$$2\cdot A_0\left(\frac{1}{2},\lambda\right) - A_0(1,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot arctan\frac{1}{2\cdot n^{\lambda}} - arctan\frac{1}{n^{\lambda}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{n^{\lambda}\cdot\left(4\cdot n^{2\cdot\lambda}+3\right)}$$

und die Bildreihe

(116) $$\underline{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\zeta[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{n^{\lambda}\cdot\left(4\cdot n^{2\cdot\lambda}+3\right)}}, \quad \frac{1}{3} < \lambda \le 1\ .$$

Für $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = 1/2$ erhält man die (schlecht konvergierenden) speziellen Reihen

(116) (a) – (b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\zeta(2k-1)\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{n\cdot\left(4\cdot n^2+3\right)}$$
$$= 2\cdot arg\,\Gamma\left(1-\frac{i}{2}\right) - arg\,\Gamma(1-i) \approx 0{,}186476...$$

(116) (c) – (d) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left(\frac{2k-1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} arctan\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(4\cdot n+3)}$$
$$= 2\cdot arg\,P_0\left(-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right) - arg\,P_0\left(-i,\frac{1}{2}\right) \approx 0.494366....$$

7. Bildfunktionen der binomischen Reihe

7.1. Die allgemeine Transformationsformel

Gegeben ist die binomische Reihe $f(z)=(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k$ mit reellem $\alpha\neq 0$.

Diese Reihe ist für positives ganzzahliges $\alpha=m$ und beliebigem z eine endliche Summe.
Für $\alpha\neq m$ ist die Reihe absolut konvergent für $|z|<1$ und falls $\alpha>0$ auch für $|z|=1$.

Man beachte, dass stets der Hauptwert der Potenz $f(z)=e^{\alpha\cdot ln(1+z)}$ gemeint ist.

Mit beliebigen reellen $\lambda>0$, μ ist nach (8), (9), (10) bzw. R(10)

$$(117)\qquad g(z)=(1+z)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k \quad , \quad k_0=min\left\{\,k\geq 0\;\middle|\;\lambda\cdot k+\mu>1\,\right\}=\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0+1$$

$$G_{\lambda,\mu}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\mu}}g\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n^{\mu}}\left(1+\frac{z}{n^{\lambda}}\right)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot\frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k+\mu}}\right]$$

$$F_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{k_0-1}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k+G_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k\ .$$

Im Folgenden werden nur Bildfunktionen für $\underline{\lambda=1}$ und $\underline{\mu=-\alpha}$ untersucht.

7.2. Der Fall $0<\alpha<1$.

Mit $\underline{\lambda=1}$ und $\underline{\mu=-\alpha<0}$ gilt $k_0=[1+\alpha]+1=2$.

Es folgt aus (117) mit dem Ansatz $g(z)=(1+z)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{1}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k=(1+z)^{\alpha}-(1+\alpha\cdot z)$

$$G(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[n^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\alpha}-\sum_{k=0}^{1}\binom{\alpha}{k}\cdot\frac{z^k}{n^{k-\alpha}}\right]=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[(n+z)^{\alpha}-n^{\alpha}-\alpha\cdot\frac{z}{n^{1-\alpha}}\right].$$

Die Transformationsregel für alle $|z|\leq 1$ und $0<\alpha<1$ lautet

$$(118)\qquad \begin{aligned}(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k \;\bullet\!\xrightarrow{1,-\alpha}\; F_{1,-\alpha}(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)\cdot z^k=\\&=\alpha\cdot\zeta(1-\alpha)\cdot z+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[(n+z)^{\alpha}-n^{\alpha}-\alpha\cdot\frac{z}{n^{1-\alpha}}\right].\end{aligned}$$

Nach (1) *ist* $\zeta_*(0-\alpha)=0$.

Die Bildfunktion (118) erfüllt folgende Beziehung

(119) $$F_{1,-\alpha}(1-z)-F_{1,-\alpha}(-z)=-(1-z)^{\alpha}.$$

Denn es gilt (*nach Aufhebung benachbarter Reihenglieder und Beachtung von* (3))

$$G(1-z)-G(-z)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[(n+1-z)^{\alpha}-(n-z)^{\alpha}-\alpha\cdot\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[(N+1-z)^{\alpha}-(1-z)^{\alpha}-\alpha\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[(N+1-z)^{\alpha}-N^{\alpha}+\alpha\cdot\left(\frac{N^{\alpha}}{\alpha}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right]-(1-z)^{\alpha}=0-\alpha\cdot\zeta(1-\alpha)-(1-z)^{\alpha}$$

$$F_{1,-\alpha}(1-z)-F_{1,-\alpha}(-z)=\alpha\cdot\zeta(1-\alpha)\cdot(1-z+z)+G(1-z)-G(-z)=-(1-z)^{\alpha}\quad .$$

Die Beziehung (119) läßt sich als Bildreihe darstellen:

(120) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)\cdot\left[(1-z)^{k}-(-z)^{k}\right]=-(1-z)^{\alpha}}\quad 0<\alpha<1\quad,\ |z|\le 1,\ |1-z|\le 1\ .$$

Für $z=0,\ 1,\ 1/2$ ergeben sich aus (120) die speziellen Reihen mit $0<\alpha<1$:

(121) (a) $$1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)=0$$ (b) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)=0$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^{2k-1}}=-\frac{1}{2^{\alpha+1}}$$ (d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)=-\frac{1}{2}.$$

Die Reihe (b) *konvergiert sehr langsam speziell für* $\alpha\approx 0$! (d) = (a)+(b).

Für $\alpha=1/2$ erhält man mit (203)(c) aus (121)

(122) (a) $$1+\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)+-\ldots=0$$

(b) $$\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)+\ldots=0$$

(c) $$\frac{1}{1!\cdot 4^{1}}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3!!}{3!\cdot 4^{3}}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{7!!}{5!\cdot 4^{5}}\cdot\zeta\left(\frac{9}{2}\right)+\frac{11!!}{7!\cdot 4^{7}}\cdot\zeta\left(\frac{13}{2}\right)+\ldots=\frac{-1}{\sqrt{8}}$$

mit $(2k+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)$.

Subtrahiert man von (120) die Originalreihe

$$f(1-z)-f(-z)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\left[(1-z)^k-(-z)^k\right]=(2-z)^{\alpha}-(1-z)^{\alpha},$$

so entstehen weitere Reihen:

(123) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[1-\zeta(k-\alpha)]\cdot\left[(1-z)^k-(-z)^k\right]=(2-z)^{\alpha} \qquad 0<\alpha<1\ ,\ |z|\le 1,\ |1-z|\le 1.$$

Für $z=0,\ 1,\ 1/2$ ergeben sich die speziellen Reihen mit $0<\alpha<1$

(124) (a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[1-\zeta(k-\alpha)]=2^{\alpha}$$ (b) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1]=1$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{1-\zeta(2k-1-\alpha)}{2^{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}$$

(d) $$\frac{1}{1!\cdot 4^1}\cdot\left[1-\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 4^3}\cdot\left[1-\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\right]+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\cdot 4^5}\cdot\left[1-\zeta\left(\frac{9}{2}\right)\right]+\ldots=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

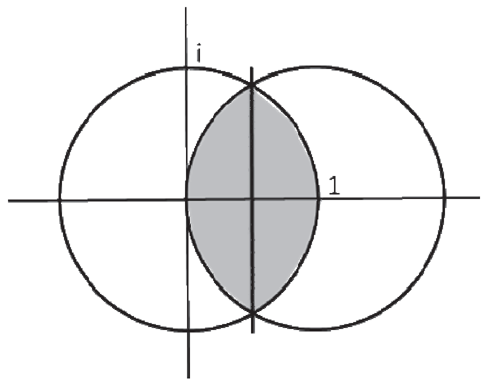
7.3. Bildreihen mit komplexem Argument, trigonometrische Reihen

Die zulässigen komplexen Werte z der Bildreihe (120) liegen in der Schnittmenge der Kreisflächen
$|z|\le 1$ und $|1-z|\le 1$.

Dazu gehören auch die Punkte auf der Mittellinie

$$z=\frac{1}{2}(1-y\cdot i)=r\cdot e^{-\varphi\cdot i} \quad \text{mit} \quad 1-z=\bar{z}=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$$

und $|y|\le\sqrt{3}$, $r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^2}$, $\varphi=arctan(y)$.



Für diese Punkte erhält die Formel (120) die folgende Form

(125) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)\cdot r^k\cdot\left[e^{\varphi\cdot k\cdot i}-(-1)^k e^{-\varphi\cdot k\cdot i}\right]=$$
$$=-r^{\alpha}\cdot e^{\varphi\cdot\alpha\cdot i}=-r^{\alpha}\cdot[cos(\varphi\cdot\alpha)+i\cdot sin(\varphi\cdot\alpha)].$$

Zerlegt man diese Summe in Teilsummen mit geradem und ungeradem Laufindex und verwendet die Beziehungen

$$\left[e^{\varphi\cdot 2k\cdot i}-(-1)^{2k}e^{-\varphi\cdot 2k\cdot i}\right]=\left[e^{\varphi\cdot 2k\cdot i}-e^{-\varphi\cdot 2k\cdot i}\right]=2\cdot i\cdot sin(2k\cdot\varphi)$$

und $$\left[e^{\varphi\cdot(2k-1)\cdot i}-(-1)^{2k-1}e^{-\varphi\cdot(2k-1)\cdot i}\right]=\left[e^{\varphi\cdot(2k-1)\cdot i}+e^{-\varphi\cdot(2k-1)\cdot i}\right]=2\cdot cos((2k-1)\cdot\varphi)\ ,$$

so liefert der Vergleich von Realteil und Imaginärteil die trigonometrischen Bildreihen

$$\text{(126)}\quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\zeta(2k-\alpha)\cdot r^{2k}\cdot sin(2k\cdot\varphi)=-\frac{1}{2}\cdot r^{\alpha}\cdot sin(\alpha\cdot\varphi)}\quad ,$$

$$\text{(127)}\quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)\cdot r^{2k-1}\cdot cos((2k-1)\cdot\varphi)=-\frac{1}{2}\cdot r^{\alpha}\cdot cos(\alpha\cdot\varphi)}$$

mit $r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^2}$ und $\varphi=arctan(y)$.

Die reellen Parameter α und y sind wählbar in den Bereichen $\underline{0<\alpha<1}$ und $|y|\le\sqrt{3}$.

Nachfolgend die Bildreihen für

$\underline{y=1}$: $r=1/\sqrt{2}$, $\varphi=\pi/4$, $\underline{y=\sqrt{3}}$: $r=1$, $\varphi=\pi/3$, $\underline{y=1/\sqrt{3}}$: $r=1/\sqrt{3}$, $\varphi=\pi/6$:

$$\text{(128)}\quad \text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k-\alpha)}{2^k}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{\alpha}}}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^k}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{1+\alpha}}}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\zeta(2k-\alpha)\cdot sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{(d)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)\ .$$

$$\text{(e)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k-\alpha)}{3^k}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{3^{\alpha}}}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{(f)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{3^k}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{3^{1+\alpha}}}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{6}\right).$$

Werden die trigonometrischen Faktoren durch entsprechende Wurzelausdrücke ersetzt, so entstehen die (z. T. weniger übersichtlichen) Reihendarstellungen:

(129) (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \cdot \binom{\alpha}{4k-2} \cdot \zeta(4k-2-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2^{\alpha}}} \cdot sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \left[2 \cdot \binom{\alpha}{4k-3} \cdot \zeta(4k-3-\alpha) - \binom{\alpha}{4k-1} \cdot \zeta(4k-1-\alpha)\right] = \frac{cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2^{\alpha}}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{6k-4} \cdot \zeta(6k-4-\alpha) - \binom{\alpha}{6k-2} \cdot \zeta(6k-2-\alpha)\right] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{6k-5} \cdot \zeta(6k-5-\alpha) - 2 \cdot \binom{\alpha}{6k-3} \cdot \zeta(6k-3-\alpha) + \binom{\alpha}{6k-1} \cdot \zeta(6k-1-\alpha)\right] =$

$= -cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{3}\right)$, $\qquad 0 < \alpha < 1$.

Hieraus ergeben sich mit $\alpha = 1/2$, $2/3$ bzw. $3/4$ die speziellen Reihen (*siehe* (203)(c))

(130) (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \binom{1/2}{4k-2} \cdot \zeta\left(4k - \frac{5}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{3k-2}} \cdot \frac{(8k-7)!!}{(4k-2)!} \cdot \zeta\left(4k - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k-1}} \binom{2/3}{4k-2} \cdot \zeta\left(4k - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \left[2 \cdot \binom{1/2}{4k-3} \cdot \zeta\left(4k - \frac{7}{2}\right) - \binom{1/2}{4k-1} \cdot \zeta\left(4k - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \cdot \left[2 \cdot \binom{2/3}{4k-3} \cdot \zeta\left(4k - \frac{11}{3}\right) - \binom{2/3}{4k-1} \cdot \zeta\left(4k - \frac{5}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{1/2}{6k-4} \cdot \zeta\left(6k - \frac{9}{2}\right) - \binom{1/2}{6k-2} \cdot \zeta\left(6k - \frac{5}{2}\right)\right] = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{3}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{3k-2}} \cdot \left[\frac{(12k-11)!!}{(6k-4)!} \cdot \zeta\left(6k - \frac{9}{2}\right) - \frac{(12k-7)!!}{4 \cdot (6k-2)!} \cdot \zeta\left(6k - \frac{5}{2}\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{3/4}{6k-4} \cdot \zeta\left(6k - \frac{19}{4}\right) - \binom{3/4}{6k-2} \cdot \zeta\left(6k - \frac{11}{4}\right)\right] = \frac{-1}{\sqrt{6}}$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{1/2}{6k-5} \cdot \zeta\left(6k - \frac{11}{2}\right) - 2 \cdot \binom{1/2}{6k-3} \cdot \zeta\left(6k - \frac{7}{2}\right) + \binom{1/2}{6k-1} \cdot \zeta\left(6k - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{3/4}{6k-5} \cdot \zeta\left(6k - \frac{23}{4}\right) - 2 \cdot \binom{3/4}{6k-3} \cdot \zeta\left(6k - \frac{15}{4}\right) + \binom{3/4}{6k-1} \cdot \zeta\left(6k - \frac{7}{4}\right)\right] = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

7.4. Der Fall $\alpha < 0$ **.**

Mit $\lambda = 1$ und $\underline{\beta := \mu = -\alpha}$, $\underline{\beta > 0}$, gilt $k_0 = [1-\beta]+1 = 1$.

Nach (117) folgt der Ansatz $g(z) = \dfrac{1}{(1+z)^\beta} - \sum_{k=0}^{0}\binom{-\beta}{k}\cdot z^k = \dfrac{1}{(1+z)^\beta} - 1$,

$$G(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n^\beta}\cdot\frac{1}{(1+z/n)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right] = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right], \quad |z|<1\,,\; z\neq 0\,.$$

Dieser Grenzwert kann nach Anlage A (215) mit der <u>HURWITZschen Zetafunktion</u> $\zeta(x,a)$ ausgedrückt werden:

$$G(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right] = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta} - \zeta(\beta), \quad \beta>0, \quad \beta\neq 1\,.$$

In der Anlage A *sind einige wichtige Relationen von* $\zeta(x,a)$ *zusammengestellt. Näheres findet man z. B. in* [W/W: XIII].

Damit gilt für die Bildfunktion

$$F_{1,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{0}\binom{-\beta}{k}\cdot\zeta_*(k+\beta)\cdot z^k + G_{1,\beta}(z) = \zeta(\beta) + G(z) = \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta}$$

und die Transformationsregel lautet für alle $|z|<1$, $z\neq 0$ und $\beta>0$, $\beta\neq 1$

$$\text{(131)}\quad \begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}\cdot z^k \;\bullet\!\xrightarrow{1,\,\beta}\; \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot z^k &= \zeta(\beta,z) - \frac{1}{z^\beta}\\ &= \zeta(\beta) + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+z)^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right].\end{aligned}$$

Mit (203)(b) erhält die Bildreihe schließlich folgende Form:

$$\text{(132)}\quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{k-1+\beta}{k}\zeta(k+\beta)\cdot z^k = \zeta(\beta,z) - \zeta(\beta) - \frac{1}{z^\beta}}, \quad |z|<1,\; z\neq 0,\; \beta>0,\; \beta\neq 1\,.$$

Für $\beta \to 1$ erhält man nach (215)

$$\text{(132) (a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\zeta(k+1)\cdot z^k = -\gamma - \psi(z) - \frac{1}{z}\,,$$

Das ist die leicht umgestellte Bildreihe (47).

Sei $\beta = n+1 \geq 2$, ganzz., dann folgt aus (132) und $\binom{k+n}{k} = \binom{n+k}{n}$

$$(133) \quad \underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{n} \zeta(n+k+1) \cdot z^k = \zeta(n+1,\, z) - \frac{1}{z^{n+1}}} \;, \quad |z| < 1,\, z \neq 0,\; n \geq 1,\, \text{ganzz..}$$

Das ist wegen (218) die (durch $n!$ gekürzte) n–te Ableitung von (132)(a) !

Für $z = 1/2$ erhält diese Reihe mittels (219) die spezielle Form

$$(134) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \binom{n+k}{n} \frac{\zeta(n+k+1)}{2^{k+1}} = 2^n - \left(2^n - 1\right) \cdot \zeta(n+1) \;, \quad n \geq 1,\, \text{ganzz.};$$

d.h. für n = 1, 3, 5 mit (220)

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot k \cdot \zeta(k+1) = 2 - \frac{1}{6} \cdot \pi^2 \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \binom{k}{3} \cdot \zeta(k+1) = 2 - \frac{7}{360} \cdot \pi^4$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{k=6}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \binom{k}{5} \cdot \zeta(k+1) = 2 - \frac{31}{15120} \cdot \pi^6 \;.$$

Aus (132) und (216) findet man analog zu (120) die zusammengesetzte Bildreihe

$$(135) \quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k-1+\beta}{k} \cdot \zeta(k+\beta) \cdot \left[\, z^k - (z-1)^k \,\right] = \frac{1}{(1-z)^{\beta}}} \;, \quad |z| < 1,\, |z-1| < 1,\; \beta > 0\,.$$

Wegen (132)(a) *und* (207)(a) *ist die Reihe auch für* $\beta = 1$ *gültig!*

Durch Subtraktion der Reihen für $(1-z)^{-\beta}$ und $(2-z)^{-\beta}$ folgt aus (135) mit (203)(b) die Differenzenreihe

$$(136) \quad \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k-1+\beta}{k} \cdot [\zeta(k+\beta) - 1] \cdot \left[\, z^k - (z-1)^k \,\right] = \frac{1}{(2-z)^{\beta}}} \;, \quad |z| < 1,\, |z-1| < 1,\; \beta > 0\,.$$

Für $z = 1/2$, $\beta > 0$ vereinfachen sich beide Reihen:

$$(137) \quad \text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+\beta}{2k+1} \cdot \frac{\zeta(2k+1+\beta)}{4^k} = 2^{\beta} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+\beta}{2k+1} \cdot \frac{\zeta(2k+1+\beta) - 1}{4^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\beta}$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+1)!!}{(2k+1)!} \cdot \frac{\zeta(2k+3/2)}{2 \cdot 16^k} = \sqrt{2} \qquad \text{(d)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+1)!!}{(2k+1)!} \cdot \frac{\zeta(2k+3/2) - 1}{2 \cdot 16^k} = \sqrt{\frac{2}{3}} \;.$$

(c) und (d) folgen für $\beta = 1/2$ und mit $\beta = 1$ ist (137)(a) = (59)(d) bzw. (137)(b) = (61)(e) .

7.5. Weitere trigonometrische Reihen

Anknüpfend an **7.3.** können aus (135) trigonometrische Reihen erzeugt werden.

Mit $z=\frac{1}{2}(1+y\cdot i)=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ und $1-z=\bar{z}=r\cdot e^{-\varphi\cdot i}$ erhält (135) die Darstellung

$$(138)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot r^k\cdot\left[e^{\varphi\cdot k\cdot i}-(-1)^k e^{-\varphi\cdot k\cdot i}\right]=r^{-\beta}\cdot[\cos(\varphi\cdot\beta)+i\cdot\sin(\varphi\cdot\beta)].$$

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^2}\,,\quad \varphi=\arctan(y) \text{ mit den reellen Parametern } \beta>0\,,\ |y|<\sqrt{3}\,.$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteilen beider Seiten liefert analog **7.3.** schließlich die trigonometrischen Teilreihen

$$(139)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\zeta(2k+\beta)\cdot r^{2k}\cdot\sin(2k\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot\sin(\beta\cdot\varphi)$$

$$(140)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1+\beta)\cdot r^{2k-1}\cdot\cos((2k-1)\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot\cos(\beta\cdot\varphi).$$

Hieraus resultieren für $y=1$: $r=1/\sqrt{2}$, $\varphi=\pi/4$ und $y=1/\sqrt{3}$: $r=1/\sqrt{3}$, $\varphi=\pi/6$ folgende Reihen für $\underline{\beta>0}$:

$$(141)\ \text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{2^{k-1}}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2^{\beta}}\cdot\sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{2^{k-1}}\cdot\cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2^{\beta-1}}\cdot\cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{3^{k}}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta}}\cdot\sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{(d)}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{3^{k}}\cdot\cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta-1}}\cdot\cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right).$$

Werden (wie in 7.4. (129)) die trigonometrischen Faktoren ersetzt, so erhalten nur (141)(a) und (b) eine übersichtliche Form:

$$(142)\quad (a)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\binom{4k+1+\beta}{4k+2}\cdot\zeta(4k+2+\beta)=\sqrt{2^{\beta}}\cdot sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(b)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\left[\binom{4k+\beta}{4k+1}\cdot\zeta(4k+1+\beta)-\frac{1}{2}\cdot\binom{4k+2+\beta}{4k+3}\cdot\zeta(4k+3+\beta)\right]=$$

$$=\sqrt{2^{\beta}}\cdot cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)\quad ,\quad \beta>0\,.$$

Für geeignete β- Werte (z. B. $\beta=1,\ \beta=2$) entstehen Reihen mit einfachen Summen:

$$(143)\quad (a)\quad \frac{\zeta(3)}{4^0}-\frac{\zeta(7)}{4^1}+\frac{\zeta(11)}{4^2}-\frac{\zeta(15)}{4^3}+\frac{\zeta(19)}{4^4}-\frac{\zeta(23)}{4^5}+-\ \ldots=1$$

$$(b)\quad \frac{2\zeta(2)-\zeta(4)}{4^0}-\frac{2\zeta(6)-\zeta(8)}{4^1}+\frac{2\zeta(10)-\zeta(12)}{4^2}-\frac{2\zeta(14)-\zeta(16)}{4^3}+-\ldots=2$$

$$(c)\quad \left(\frac{\zeta(3)}{3^1}+\frac{\zeta(5)}{3^2}\right)-\left(\frac{\zeta(9)}{3^4}+\frac{\zeta(11)}{3^5}\right)+\left(\frac{\zeta(15)}{3^7}+\frac{\zeta(17)}{3^8}\right)-\left(\frac{\zeta(21)}{3^{10}}+\frac{\zeta(23)}{3^{11}}\right)+-\ \ldots=\frac{1}{2}$$

$$(d)\quad \left(\frac{\zeta(2)}{3^1}-\frac{\zeta(6)}{3^3}\right)-\left(\frac{\zeta(8)}{3^4}-\frac{\zeta(12)}{3^6}\right)+\left(\frac{\zeta(14)}{3^7}-\frac{\zeta(18)}{3^9}\right)-\left(\frac{\zeta(20)}{3^{10}}-\frac{\zeta(24)}{3^{12}}\right)+-\ldots=\frac{1}{2}$$

$$(e)\quad 3\cdot\frac{\zeta(4)}{2^1}-7\cdot\frac{\zeta(8)}{2^3}+11\frac{\zeta(12)}{2^5}-15\cdot\frac{\zeta(16)}{2^7}+19\cdot\frac{\zeta(20)}{2^9}-23\cdot\frac{\zeta(24)}{2^{11}}+\ldots=1$$

$$(f)\quad \frac{\zeta(3)-\zeta(5)}{4^0}-\frac{3\zeta(7)-2\zeta(9)}{4^1}+\frac{5\zeta(11)-3\zeta(13)}{4^2}-\frac{7\zeta(15)-4\zeta(17)}{4^3}+-\ldots=0$$

$$(g)\quad \left(\frac{3\zeta(4)}{3^2}+\frac{5\zeta(6)}{3^3}\right)-\left(\frac{9\zeta(10)}{3^5}+\frac{11\zeta(12)}{3^6}\right)+\left(\frac{15\zeta(16)}{3^8}+\frac{17\zeta(18)}{3^9}\right)-+\ \ldots=\frac{1}{2}$$

$$(h)\quad \left(\frac{\zeta(3)}{3^1}+\frac{3\zeta(7)}{3^3}\right)-\left(\frac{4\zeta(9)}{3^4}-\frac{6\zeta(13)}{3^6}\right)+\left(\frac{7\zeta(15)}{3^7}+\frac{9\zeta(19)}{3^9}\right)-+\ \ldots=\frac{1}{4}\ .$$

Für gebrochenes β entstehen ähnliche Reihen wie in (130). Es möge genügen, die zu (130)(a) analogen Reihen aus (142)(a) für $\beta=3/2$ und $\beta=1/2$ zu bilden.

$$(144)\quad (a)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\binom{4k+5/2}{4k+2}\cdot\zeta\left(4k+\frac{7}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{3k+1}}\cdot\frac{(8k+5)!!}{(4k+2)!}\cdot\zeta\left(4k+\frac{7}{2}\right)=\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

$$(b)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\cdot\binom{4k+3/2}{4k+2}\cdot\zeta\left(4k+\frac{5}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{3k+1}}\cdot\frac{(8k+3)!!}{(4k+2)!}\cdot\zeta\left(4k+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}\,.$$

Hier wurde $sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ *verwendet.*

8. Bildfunktionen der Exponential- und trigonometrischen Funktionen

8.1. Die Transformation der Exponentialfunktion

Gegeben ist die Exponentialreihe $f(z) = exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k$, z beliebig komplex.

Mit reellen $\lambda > 0$, μ folgen aus (8), (9), (10) die Transformationsformeln

(145) $$g(z) = exp(z) - \sum_{k=0}^{k_0 - 1} \frac{1}{k!} \cdot z^k \quad , \quad k_0 := min\left\{ k \geq 0 \mid \lambda \cdot k + \mu > 1 \right\} = \left[\frac{1-\mu}{\lambda} \right]_0 + 1$$

$$G_{\lambda,\mu}(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} g\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n^{\mu}} exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) - \sum_{k=0}^{k_0 - 1} \frac{1}{k!} \cdot \frac{z^k}{n^{\lambda \cdot k + \mu}} \right]$$

$$E_{\lambda,\mu}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{k_0 - 1} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k + G_{\lambda,\mu}(z)$$

mit den speziellen Bildreihen

(146) (a) $$\underline{E_{1,0}(z) = \gamma \cdot z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta(k) \cdot z^k = \gamma \cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{z}{n} \right) - 1 - \frac{z}{n} \right]},$$

(b) $$\underline{E_{\lambda,\mu}(z) = \zeta_*(\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \zeta_*(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left[\exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) - 1 \right]}$$

für $1 - \lambda < \mu \leq 1$,

z. B. (b1) $$E_{\lambda > 1,\, 0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta(\lambda \cdot k) \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) - 1 \right]$$

(b2) $$E_{\lambda,\, 1}(z) = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta(\lambda \cdot k + 1) \cdot z^k = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left[\exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) - 1 \right],$$

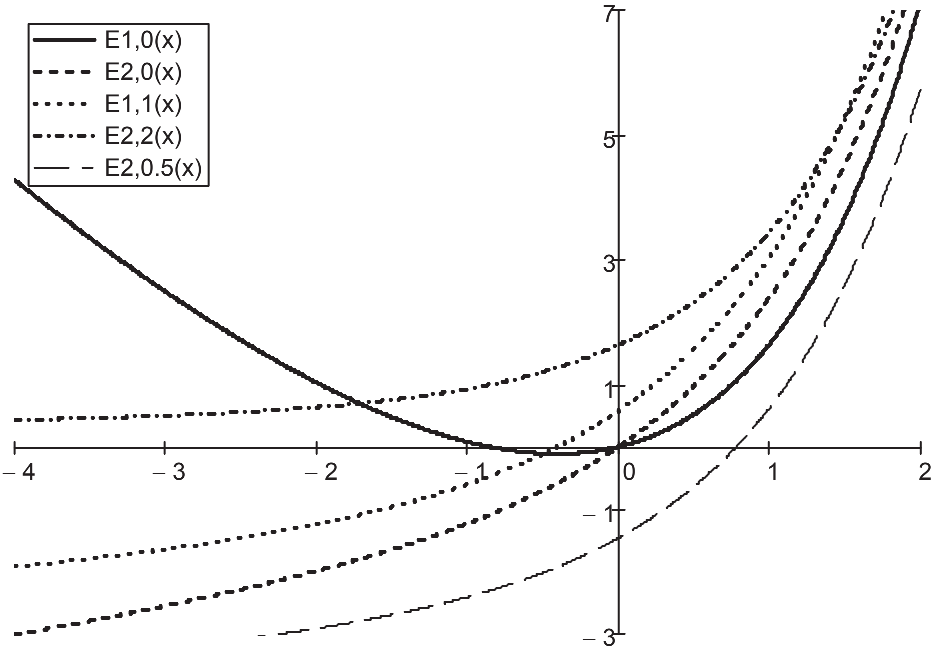
(c) $$\underline{E_{\lambda,\, \mu > 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{\mu}} \exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}} \right) \right]}$$ für alle $z \in \boldsymbol{C}$.

Es gelten offensichtlich die Beziehungen:

(147) (a) $E_{\lambda,\mu}(0) = \zeta_*(\mu)$, (b) $\frac{d^m}{dz^m} E_{\lambda,\mu}(z) = E_{\lambda,\mu + m \cdot \lambda}(z)$.

Die Grafik zeigt für reelle x den Verlauf von

$$E_{1,0}(x),\ \ E_{2,0}(x),\ \ E_{1,1}(x)=E'_{1,0}(x),\ \ E_{2,2}(x)=E'_{2,0}(x)\ \text{und}\ E_{2,\,0.5}(x).$$



Sei $\underline{x>0}$. Dann gelten folgende Abschätzungen für $\underline{\mu>1}$.

(148) (a) $0<e^{x}<E_{\lambda,\mu}(x)<\zeta(\mu)\cdot e^{x}$,

(b) $0<e^{-x}+(\zeta(\mu)-1)\cdot e^{-x/2^{\lambda}}<E_{\lambda,\mu}(-x)<e^{-x}+\zeta(\mu)-1$,

(c) $E_{\lambda,\mu}(-x)<\zeta(\mu-\delta)\cdot\left(\dfrac{\delta}{\lambda\cdot e}\right)^{\delta/\lambda}\cdot x^{-\delta/\lambda}$ für $\mu>1+\delta,\ \ \delta>0$.

Für (148)(a), (b) *verwende* $1<\zeta(\lambda k+\mu)<\zeta(\mu)$ *bzw.* $e^{-x}<e^{-x/2^{\lambda}}<e^{-x/n^{\lambda}}<1,\ (n>2)$.

(148)(c) *entsteht, wenn die Faktoren* $f(n)$ *durch das Maximum von* $f(t)=t^{-\delta}\cdot e^{-x/t^{\lambda}}$, $t\geq 1$ *in der Summe* $E_{\lambda,\mu}(-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\mu-\delta}}f(n)$ *ersetzt werden.*

Mit $f'(t)=0$ *folgt* $t_{\max}=\left(\dfrac{x\cdot\lambda}{\delta}\right)^{1/\lambda}$ *und* $f(t_{\max})=\left(\dfrac{\delta}{\lambda\cdot e}\right)^{\delta/\lambda}\cdot x^{-\delta/\lambda}$.

Aus (148)(a) und (b) folgt mit (147)(b) für <u>alle</u> reellen x $E'_{\lambda,\mu\geq 1}(x)=E_{\lambda,\mu+\lambda>1}(x)>0$, d.h. die Bildreihen (146)(b) und (c) sind streng monoton steigend.

Da zu jedem $\mu>1$ ein $\delta>0$ mit $\mu>1+\delta$ wählbar ist, folgt aus (c):

(148) (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}E_{\lambda,\mu>1}(x)=0$ bzw. allgemeiner $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^{a}\cdot E_{\lambda,\mu>1+a\cdot\lambda}(x)=0\ ,a\geq 0$.

8.2. Bildfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Aufgrund der 3. Transformationsregeln R(2) und R(3) ergeben sich aus der Darstellung der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion analoge Darstellungen ihrer Bilder.

$$(149)\quad \sin(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot z^{2k+1} \;\bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu}\; S_{\lambda,\mu}(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\zeta_*(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)}{(2k+1)!}\cdot z^{2k+1}$$

$$=\frac{exp(iz)-exp(-iz)}{2i}\qquad\qquad =\frac{E_{\lambda,\mu}(iz)-E_{\lambda,\mu}(-iz)}{2i}$$

$$(150)\quad \cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot z^{2k} \;\bullet\!\xrightarrow{\lambda,\mu}\; C_{\lambda,\mu}(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\zeta_*(\lambda\cdot 2k+\mu)\cdot z^{2k}$$

$$=\frac{exp(iz)+exp(-iz)}{2}\qquad\qquad =\frac{E_{\lambda,\mu}(iz)+E_{\lambda,\mu}(-iz)}{2}$$

Die Bildfunktionen $S_{\lambda,\mu}(z)$, $C_{\lambda,\mu}(z)$ sind an der Stelle $z=0$ in Potenzreihen entwickelt.

Weiterhin lassen sich die Bildfunktionen mittels (146) auch als Reihen trigonometrischer Funktionen darstellen:

$$(151)\quad \text{(a1)}\; S_{1,0}(z)=\gamma\cdot z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[sin\left(\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]\qquad \text{(b1)}\; C_{1,0}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[cos\left(\frac{z}{n}\right)-1\right]$$

$$\text{(a2)}\; S_{\lambda>1,0}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\qquad \text{(b2)}\; C_{\lambda>1,0}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)-1\right]$$

$$\text{(a3)}\; S_{\lambda,1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\qquad \text{(b3)}\; C_{\lambda,1}(z)=\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)-1\right]$$

$$\text{(a4)}\; S_{\lambda,\mu>1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot\sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\qquad \text{(b4)}\; C_{\lambda,\mu>1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot\cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)$$

Im Unterschied zu Fourierreihen werden nicht trigonometrische Funktionen von *Vielfachen* des Arguments überlagert, sondern von *Bruchteilen* des Arguments.
Für diese gelten u. a. keine Orthogonalitätsbedingungen.

Einige offensichtliche Beziehungen sind nachfolgend zusammengestellt:

$$(152)\quad \text{(a)}\quad S_{\lambda,\mu}(0)=0\;,\quad C_{\lambda,\mu}(0)=\zeta_*(\mu)$$

$$\text{(b)}\quad \frac{d}{dz}S_{\lambda,\mu}(z)=C_{\lambda,\,\mu+\lambda}(z)\;,\quad \frac{d}{dz}C_{\lambda,\mu}(z)=-S_{\lambda,\,\mu+\lambda}(z)$$

$$\text{(c)}\quad S_{\lambda,\mu}(-z)=-S_{\lambda,\mu}(z)\quad ,\quad C_{\lambda,\mu}(-z)=C_{\lambda,\mu}(z)$$

$$\text{(d)}\quad E_{\lambda,\mu}(iz)=C_{\lambda,\mu}(z)+i\cdot S_{\lambda,\mu}(z)$$

In nachfolgenden Aussagen ist $\underline{x \text{ reell}}$ und $\underline{\mu > 1}$.

1. Die Bildfunktionen $F(x) = S_{\lambda,\mu>1}(x)$ bzw. $F(x) = C_{\lambda,\mu>1}(x)$ sind beschränkt.

(153) $\quad \left|S_{\lambda,\mu>1}(x)\right| \le \zeta(\mu) \qquad , \qquad \left|C_{\lambda,\mu>1}(x)\right| \le \zeta(\mu) = C_{\lambda,\mu}(0)$.

Denn es ist z. B. $\left|S_{\lambda,\mu>1}(x)\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left|\sin\left(\frac{x}{n^{\lambda}}\right)\right| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot 1 = \zeta(\mu)$.

2. Die Näherungssummen $F(x,N)$ der Bildfunktionen $F(x)$ sind für $m = 1, 2, ..$ periodisch.

(154) $\quad S_{m,\mu}(x,N) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \sin\left(\frac{x}{n^{m}}\right) \; , \; C_{m,\mu}(x,N) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \cos\left(\frac{x}{n^{m}}\right)$

$$S_{m,\mu}(x,N) = S_{m,\mu}(x+P,N) \quad , \quad C_{m,\mu}(x,N) = C_{m,\mu}(x+P,N).$$

Die Periode ist $P = P(N) = 2\cdot\pi\cdot\nu(N)^{m}$.

$\nu(N) = lcm\,(1,..,N)$ ist das kleinsten gemeinsamen Vielfachen der natürlichen Zahlen $n \le N$.

3. Die Bildfunktionen $F(x) = S_{m,\mu>1}(x)$ bzw. $F(x) = C_{m,\mu>1}(x)$ sind für ganzzahlige $\lambda := m = 1, 2, ...$ aufgrund folgender Eigenschaft „fast periodisch“:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $p = p(\varepsilon)$ derart, dass für alle x gilt:

(155) $\quad \left|F(x+p) - F(x)\right| < \varepsilon . \qquad$ (Für $\varepsilon \to 0$ gilt $p(\varepsilon) \to \infty$) .

Wähle zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ *ein* $N = N(\varepsilon)$ *mit* $\zeta(\mu) - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\mu}} < \frac{\varepsilon}{2}$ *und bilde* $p(\varepsilon) = P(N)$.
Dann gilt mit $f(x) = \sin(x)$ *bzw.* $f(x) = \cos(x)$

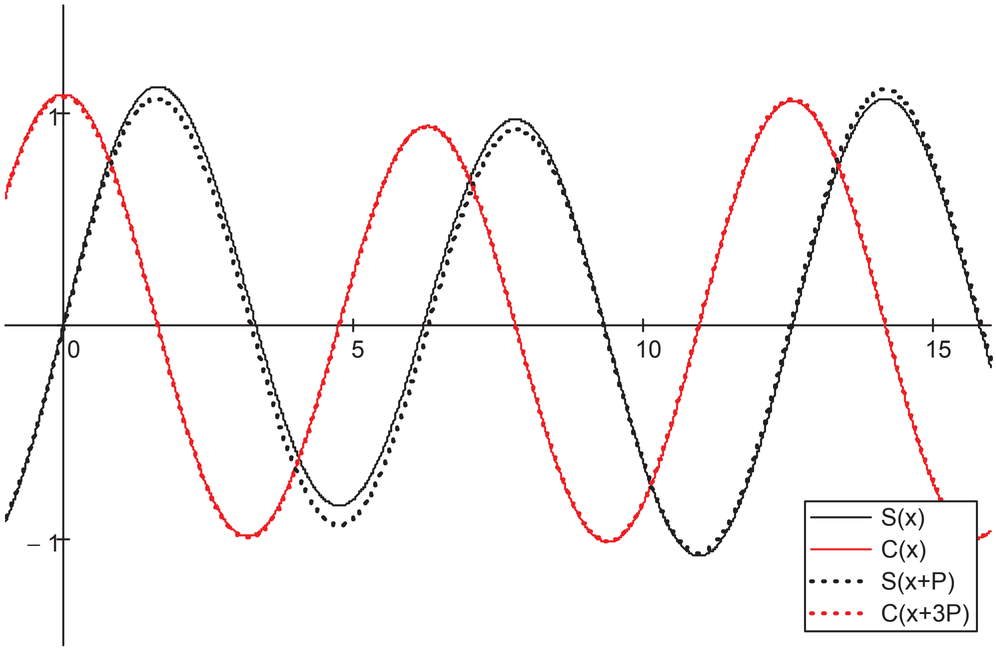
$$F(x+p) - F(x) = F(x+p,N) - F(x,N) \; + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left(f\left(\frac{x+p}{n^{m}}\right) - f\left(\frac{x}{n^{m}}\right)\right).$$

Nach (154) *folgt die Abschätzung*

$$\left|F(x+p) - F(x)\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} \cdot \left| f\left(\frac{x+p}{n^{m}}\right) - f\left(\frac{x}{n^{m}}\right)\right| < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^{\mu}} = 2\cdot\left(\zeta(\mu) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\mu}}\right) < \varepsilon .$$

Anmerkung:
Für das gewählte $p(\varepsilon) = P(N)$ *liegen die Abweichungen zum Teil wesentlich unter* ε, *da die Summanden fast immer* $< 2\cdot n^{-\mu}$ *sind.*

In der Grafik sind die Kurven $S_{1,3}(x)$ und $C_{1,4}(x)=\frac{d}{dx}S_{1,3}(x)$ sowie die um Vielfache von $P(2)=2\pi\cdot 2^1$ verschobenen Kurven $S_{1,3}(x+P)$ und $C_{1,4}(x+3\cdot P)$ dargestellt, ($S(0)=0$).



Die Abweichungen $|S(x+P)-S(x)|$ liegen z. B. unter $2\cdot\left(\zeta(3)-\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n^3}\right)=0{,}154\ldots\le\varepsilon$.

8.3. Beispiele unter Verwendung der Fehler- und Fresnel-Integrale

Sei $\underline{\mu>1+\lambda/2}$, $x\ge 0$. Dann folgt mit den in (224) … (226) definierten Integralen

$$\Phi(x):=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,,\quad S(x):=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt\,,\quad C(x):=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt$$

durch gliedweise Integration aus (146)(c) und (151)(a4),(b4)

(156) $$\int_0^x E_{\lambda,\mu}\left(-z^2\right)dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu-\lambda/2}}\cdot\Phi\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right)\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)\quad\text{für } x\to\infty\,.$$

(157) (a) $$\int_0^x S_{\lambda,\mu}\left(z^2\right)dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu-\lambda/2}}\cdot S\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right)\to\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right),$$

(b) $$\int_0^x C_{\lambda,\mu}\left(z^2\right)dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu-\lambda/2}}\cdot C\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right)\to\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)\quad\text{für } x\to\infty\,.$$

Führt man für die zugehörigen Bildreihen von $E_{\lambda,\mu}\left(-z^2\right)$, $S_{\lambda,\mu}\left(z^2\right)$, $C_{\lambda,\mu}\left(z^2\right)$ die gliedweise Integration aus, so ergeben sich die folgenden Grenzwerte:

$$(158)\quad \underline{\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot(2k+1)}\cdot\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot x^{2k+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)}\quad,\qquad \mu>1+\lambda/2\ .$$

$$(159)\quad (a)\quad \underline{\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!\cdot(4k+3)}\cdot\zeta(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)\cdot x^{4k+3}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)},$$

$$(b)\quad \underline{\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\cdot(4k+1)}\cdot\zeta(\lambda\cdot 2k+\mu)\cdot x^{4k+1}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)},\quad \mu>1+\lambda/2\,.$$

Offensichtlich sind die Reihen (158), (159) spezielle Bildreihen von $\Phi(x)$, $S(x)$, $C(x)$ und gehen für $\mu\to\infty$, d. h. $\zeta\to 1$, in deren Reihenentwicklungen über.

Aus $\frac{d}{dz}E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-z^2\right)=-2\cdot z\cdot E_{\lambda,\,\mu}\left(-z^2\right)$ folgt für $\underline{\mu>1+\lambda}$ nach (147)(a) und (148)(d)

$$(160)\quad \int_0^x z\cdot E_{\lambda,\mu}\left(-z^2\right)dz=\frac{1}{2}\left[E_{\lambda,\mu-\lambda}(0)-E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-x^2\right)\right]\to\frac{1}{2}\cdot\zeta(\mu-\lambda)\ \text{ für } x\to\infty.$$

Analog folgt aus $\frac{d}{dz}z\cdot E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-z^2\right)=E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-z^2\right)-2\cdot z^2\cdot E_{\lambda,\,\mu}\left(-z^2\right)$ für $\underline{\mu>1+\frac{3}{2}\cdot\lambda}$

unter Beachtung von (156)

$$(161)\quad \int_0^x z^2E_{\lambda,\mu}\left(-z^2\right)dz=\frac{1}{2}\left[-x\cdot E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-x^2\right)\right]+\frac{1}{2}\int_0^x E_{\lambda,\mu-\lambda}\left(-z^2\right)dz\to\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{3}{2}\lambda\right).$$

Aus (160) und (161) ergeben sich die Grenzwerte für folgende Bildreihen:

$$(162)\quad (a)\quad \underline{\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\cdot\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot x^{2k+2}=\zeta(\mu-\lambda)}\ ,\quad \mu>1+\lambda\ ,$$

$$(b)\quad \underline{\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\cdot(2k+3)}\cdot\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot x^{2k+3}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\zeta\left(\mu-\frac{3}{2}\cdot\lambda\right)},\quad \mu>1+\frac{3}{2}\cdot\lambda\ .$$

Die Dichtefunktion $\varphi(x):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\zeta(\mu-\lambda/2)}\cdot E_{\lambda,\mu}\left(-x^2\right)$ beschreibt eine symmetrische Fehlerverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Streuung $\zeta\left(\mu-\frac{3}{2}\cdot\lambda\right)\Big/2\cdot\zeta\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)$.

Für $\mu\to\infty$ geht die Verteilung in die der Fehlerfunktion $\Phi(x)$ über.

8.4. Laplacetransformationen der Bildreihen und Bildfunktionen

Wendet man auf die Bildreihen von $E_{\lambda,\mu}(z)$, $S_{\lambda,\mu}(z)$ und $C_{\lambda,\mu}(z)$ und die entsprechenden Bildfunktionen (in Form unendlicher Summen) gliedweise die LAPLACE-Transformationen (221) bis (223) aus dem **Anhang A** an, so entstehen belangreichende Beziehungen.

Zum einen gelten für die Bildreihen und $\operatorname{Re}(z) > 0$

(163) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{\lambda,\mu}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^{k+1} ,$$

(164) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{\lambda,\mu}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta_*(\lambda \cdot 2k + \mu) \cdot z^{2k+1} ,$$

(165) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot S_{\lambda,\mu}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta_*(\lambda(2k+1) + \mu) \cdot z^{2k+2} .$$

Die rechts stehenden Reihen konvergieren zumindest für $0 \le |z| < 1$, da sie Bildreihen der Potenzreihen von $f(z) = \frac{z}{1-z}$, $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$, $f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ sind.

Zum anderen stehen die transformierten Bildfunktionen in Beziehung zu den Funktionen $Q_\mu(z,\lambda)$, die im Abschnitt **4.2.** Formel (20) eingeführt wurden.
Die transformierten Bildfunktionen und entsprechende Beziehungen sind in den Formeln (166) bis (168) zusammengestellt. Man vergleiche dazu die Abschnitte **4.2. – 4.5.** .

Anmerkung zur Integration: Zum Beispiel ergibt sich (163)(a) *mit* (221) *wie folgt*

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{\lambda,\mu}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot t^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_*(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^{k+1} .$$

Ebenso findet man mit (221) *aus* (146)(a) *die nachfolgende Formel* (166)(a)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{1,0}(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot \gamma \cdot t\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot \left[e^{\frac{t}{n}} - 1 - \frac{t}{n} \right] dt$$

$$= \gamma \cdot z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n \cdot z}{n-z} \cdot 0! - z \cdot 0! - \frac{1}{n} \cdot z^2 \cdot 1! \right] = \gamma \cdot z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^3}{n \cdot (n-z)} ,$$

oder mit (222) *aus* (151)(b3) *die Formel* (167)(c)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{\lambda,1}(t)dt = \int_0^\infty \gamma \cdot e^{-\frac{t}{z}} dt + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \cos\left(\frac{t}{n^\lambda}\right) - \frac{1}{n}\right] dt$$

$$= \gamma \cdot z + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{z \cdot n^{2\lambda}}{n^{2\lambda} + z^2} - z\right] = \gamma \cdot z - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z}{n^{2\lambda} + z^2} \quad .$$

Sei $\underline{\mathrm{Re}(z) > 0}$, dann gelten für die Integrale

(166) (a) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{1,0}(t)\, dt = \gamma \cdot z^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z^3}{n-z} = z^2 \cdot (\gamma - Q_0(z,1)) = -z^2 \cdot \psi(1-z)$$

(b) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{\lambda>1,0}(t)\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^2}{n^\lambda - z} = -Q_0(z, \lambda > 1)$$

(c) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{\lambda,1}(t)\, dt = \gamma \cdot z + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z^2}{n^\lambda - z} = \gamma \cdot z - Q_1(z,\lambda)$$

(d) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot E_{\lambda,\mu>1}(t)\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\mu} \cdot \frac{z \cdot n^\lambda}{n^\lambda - z} = -z \cdot Q_{\mu-\lambda}(z,\lambda)$$

(167) (a) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{1,0}(t)dt = -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^3}{n^2 + z^2} = \frac{z}{2} \cdot [1 - \pi \cdot z \cdot \coth(\pi \cdot z)]$$

(b) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{\lambda>1,0}(t)dt = -\sum_{n=1}^\infty \frac{z^3}{n^{2\cdot\lambda} + z^2}$$

(c) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{\lambda,1}(t)dt = \gamma \cdot z - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z^3}{n^{2\cdot\lambda} + z^2}$$

(d) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot C_{\lambda,\mu>1}(t)dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\mu} \cdot \frac{z \cdot n^{2\lambda}}{n^{2\cdot\lambda} + z^2}$$

(168) (a) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot S_{1,0}(t)dt = \gamma \cdot z^2 - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{z^4}{n^2 + z^2}$$

(b) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot S_{\lambda>1,0}(t)dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^2 \cdot n^\lambda}{n^{2\cdot\lambda} + z^2}$$

(c) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \cdot S_{\lambda,\mu\geq1}(t)dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\mu} \cdot \frac{z^2 \cdot n^\lambda}{n^{2\cdot\lambda} + z^2} \quad .$$

Durch Vergleich von (166)..(168) mit (163)..(165) lassen sich zu den Reihendarstellungen im Abschnitt **4.5.** weitere hinzufügen, wobei die Einschränkung $\mathrm{Re}(z) > 0$ zu überprüfen ist.

Zusammenfassend gelten die folgenden zumindest für $|z|<1$ gültigen Bildreihen, wobei gelegentlich Kürzungen durch z erfolgten und erste Glieder umgeordnet wurden:

(169) (a) $\sum_{k=2}^{\infty}\zeta(k)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z^2}{n-z}$ =>(45) ,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(\lambda\cdot k)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^{\lambda}-z},\ \lambda>1,$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(\lambda\cdot k+1)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z}{n^{\lambda}-z},\ \lambda>0,$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot\frac{n^{\lambda}}{n^{\lambda}-z},\ \lambda>0,\mu>1.$

(170) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2+z^2}$ =>(50) ,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(\lambda\cdot 2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}+z^2},\ \lambda>1,$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(\lambda\cdot 2\cdot k+1)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z^2}{n^{2\cdot\lambda}+z^2},\ \lambda>0,$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\zeta(\lambda\cdot 2\cdot k+\mu)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot\frac{z^{2\cdot\lambda}}{n^{2\cdot\lambda}+z^2},\ \lambda>0,\ \mu>1.$

(171) (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k+1)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z^2}{n^2+z^2}$ =>(48) , (170)(c) ,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\zeta(\lambda\cdot(2k+1))\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\lambda}}{n^{2\cdot\lambda}+z^2},\ \lambda>1,$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\zeta(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)\cdot z^{2\cdot k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}\cdot\frac{n^{\lambda}}{n^{2\cdot\lambda}+z^2},\ \lambda>0,\ \mu>1-\lambda\ !$

9. Einiges zu den in den Bildfunktionen auftretenden Summen

9.1. Restglieder in der Reihenentwicklung von Bildfunktionen

Die in den Abschnitten **4.5.** und **8.4.** speziell im Zusammenhang mit $Q_\mu(z,\lambda)$ auftretenden unendlichen Summen werden nachfolgend unter einem erweiterten Aspekt untersucht.

Werden in der Identität $\sum_{k=1}^{m} c\cdot q^k = \frac{c\cdot q}{1-q} - \frac{c\cdot q^{m+1}}{1-q}$, $q \neq 1$, $m = 1,2,3,...$ die Variablen c, q ersetzt durch $c = 1/n^\mu$ und $q = z/n^\lambda$ mit $z \in \mathbf{C}$, $n, m \in \mathbf{N}$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^{\lambda\cdot k+\mu}}\cdot z^k = \frac{1}{n^\mu}\cdot\frac{z}{n^\lambda - z} - \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}}\frac{z^{m+1}}{n^\lambda - z}, \quad z \neq n^\lambda .$$

Bei geeigneter Wahl von λ, μ (z. B. $\lambda+\mu>1$) kann über n summiert werden, wobei alle Summen konvergent sind.

$$(172) \quad \sum_{k=1}^{m} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\mu}\cdot\frac{z}{n^\lambda - z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}}\frac{z^{m+1}}{n^\lambda - z} .$$

Wird nach (20) die erste rechte Summe durch $-z\cdot Q_\mu(z,\lambda)$ ersetzt, so gilt schließlich

$$(173) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}}\frac{z^{m+1}}{n^\lambda - z} = -\sum_{k=1}^{m} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k - z\cdot Q_\mu(z,\lambda)$$

$$m = 1,2,3,..., \quad z \neq n^\lambda, \quad \lambda > 0, \quad \lambda+\mu>1.$$

Für $|z|<1$ gilt nach (18) $-z\cdot Q_\mu(z,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k$ und (172) liefert

$$(174) \quad F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k = \sum_{k=1}^{m} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}}\frac{z^{m+1}}{n^\lambda - z} = F_m(z) + R_m(z)$$

$$m = 1,2,3,..., \quad |z|<1, \quad \lambda > 0, \quad \lambda+\mu>1.$$

Diese Bildreihe $F(z)$ wird zerlegt in die Partialsumme $F_m(z)$ und das Restglied $R_m(z)$.
Das Restglied geht mit wachsendem m gegen Null.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}}\cdot\frac{z^{m+1}}{n^\lambda - z}\right| < \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda\cdot m+\mu}} = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}\cdot\zeta(\lambda\cdot m+\mu) \to 0\cdot 1 \quad \text{für } m\to\infty .$$

Zur allgemeinen Darstellung $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \zeta_*(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k = F_m(z) + R_m(z)$ vergleiche auch die Abschätzung (12) der Differenzenreihe $DF(z)$.

9.2. Zusammenstellung von Summenformeln

Die Formel (173) liefert für bekannte Darstellungen spezieller $Q_\mu(z,\lambda)$ die Möglichkeit der Zusammenstellung von Summenformeln. Nachfolgend einige Beispiele ($m=1,2,3,...$).

$\underline{\mu=1,\ \lambda=1}$, Formel (20)(b) und (28).

(175) $$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m+1}}\cdot\frac{z^{m+1}}{n-z}=-\psi(1-z)-\gamma-\sum_{k=1}^{m}\zeta(k+1)\cdot z^k}\ ,\quad z\neq n\,.$$

$\underline{\mu=0,\ \lambda=2}$, $z:=z^2$ bzw. $z:=(i\cdot z)^2=-z^2$ und Formel (29).

(176) $$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\cdot m}}\cdot\frac{z^{2\cdot m+2}}{n^2-z^2}=\frac{1}{2}[1-\pi z\cdot\cot(\pi z)]-\sum_{k=1}^{m}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k}}\ ,\quad z\neq\pm n\,,$$

(177) $$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n^{2\cdot m}}\cdot\frac{z^{2\cdot m+2}}{n^2+z^2}=\frac{1}{2}[\pi z\cdot\coth(\pi z)-1]-\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\cdot\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k}}\ ,\ z\neq\pm i\cdot n\,.$$

Aus (175) folgen z. B. mit (210) und (220) die speziellen Summen

(178) (a) $m=2\ ,\ z=-\frac{1}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot n^3\cdot(2n+1)}=1-ln(2)-\frac{\pi^2}{24}+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3),$$

(b) $m=2\ ,\ z=\frac{1}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot n^3\cdot(2n-1)}=ln(2)-\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3),$$

(c) $m=2\ ,\ z=-\frac{3}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8\cdot n^3\cdot(2n+3)}=\frac{4}{27}-\frac{1}{9}\cdot\ln(2)-\frac{\pi^2}{72}+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3).$$

(d) $m=2\ ,\ z=-\frac{5}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{8\cdot n^3\cdot(2n+5)}=\frac{23}{375}-\frac{1}{25}\cdot\ln(2)-\frac{\pi^2}{120}+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3),$$

(e) $m=3\ ,\ z=-\frac{1}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16\cdot n^4\cdot(2n+1)}=-1+\ln(2)+\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^4}{1440}-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3),$$

(f) $m=3\ ,\ z=\frac{1}{2}$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16\cdot n^4\cdot(2n-1)}=\ln(2)-\frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^4}{1440}-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3).$$

Anmerkung:

Einzelne Formeln können auch direkt aus der Partialbruchzerlegung der Summanden erstellt werden. So ist zum Beispiel für (b) *folgende Zerlegung geeignet:*

$$\frac{1}{8\cdot n^3\cdot(2n-1)}+\frac{1}{8\cdot n^3}=\frac{1}{4\cdot n^2\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{4\cdot n^2}\,.$$

Aus (176) und (177) folgen speziell für $m = 2, 3$ die Summenformeln

(179) (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2 \cdot z^4} \cdot \left[-\frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot cot(\pi\, z) + 1 \right], \quad z \neq \pm\, n,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2 \cdot z^6} \cdot \left[-\frac{\pi^4}{45} \cdot z^4 - \frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot cot(\pi z) + 1 \right], \ z \neq \pm\, n,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{1}{2 \cdot z^4} \left[\frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 - \pi \cdot z \cdot coth(\pi\, z) + 1 \right], \ z \neq \pm\, i \cdot n,$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{1}{2 \cdot z^6} \left[\frac{\pi^4}{45} \cdot z^4 - \frac{\pi^2}{3} \cdot z^2 + \pi \cdot z \cdot coth(\pi z) - 1 \right], \ z \neq \pm\, i \cdot n.$$

Anmerkung: *Für reelle* $z = x > 1$ *kann der Faktor* $coth(\pi \cdot x) \approx 1$ *vernachlässigt werden.*
Vgl. APELBLAT [A] *S. 245/246* .

Setzt man in (179)(a),(b) $z = k + 1/2$ bzw. $z = k + 1/4$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so folgt schließlich

(180) (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2n)^2 - (2k+1)^2} = \frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{\pi^2}{6},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2n)^2 - (2k+1)^2} = \frac{8}{(2k+1)^4} - \frac{2 \cdot \pi^2}{3 \cdot (2k+1)^2} - \frac{\pi^4}{90}.$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(4k+1)^2}{(4n)^2 - (4k+1)^2} = \frac{8}{(4k+1)^2} - \frac{2 \cdot \pi}{4k+1} - \frac{\pi^2}{6},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(4k+1)^2}{(4n)^2 - (4k+1)^2} = \frac{128}{(4k+1)^4} - \frac{32 \cdot \pi}{(4k+1)^3} - \frac{8 \cdot \pi^2}{3 \cdot (4k+1)^2} - \frac{\pi^4}{90}.$$

Subtrahiert man (178) (a) von (b) und beachtet $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{4n^2 - 1}$, so ergibt sich

(181) $$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 8 \cdot \ln(2) - 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cdot \left(4n^2 - 1\right)}.$$

Diese Formel liefert für $\zeta(3)$ vier genaue Nachkommastellen mit nur 6 Summanden in der rechten Summe, aber erst mit 95 Summanden in der linken Summe.

KOECHER [Koe] *S 51 f.* zeigt, wie mit relativ einfachen Mitteln weitaus effektivere Formeln zur Berechnung von $\zeta(3)$ gewonnen werden können.
Umfassend behandeln SERIVASTAVA/CHOI [S/C] *Chap.4* das Problem für $\zeta(2n+1)$. Diese Mongraphie kann jedem ausdrücklich empfohlen werden, der sich tiefer mit der insgesamt in meinem Beitrag vorgestellten Thematik vertraut machen will.

Anhang A Formeln

Einige Eigenschaften der Gammafunktion Γ(z), Digammafunktion ψ(z) und HURWITZschen Zetafunktion ζ(x, z)

Näheres siehe z. B. in [W/W: VII, XII, XIII], [G/R: Vol.2 8.3 , 9.5], [A/S: 4., 6., 23.].

(200) $$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{n^z \cdot (n-1)!}{z\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

(201) (a) $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\cdot e^{\gamma\cdot z}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot e^{-\frac{z}{n}}$$ (b) $$sin(\pi\cdot z) = z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

(202) (a) $$\Gamma(z)\cdot z\cdot(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n-1) = \Gamma(z+n)\ , \quad \Gamma(n+1) = n!$$

(b) $$\lim_{z\to 0} z\cdot ln\,\Gamma(z) = 0$$

(203) (a) $$\binom{x}{n} := \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(x-n+1)}$$

(b) $$\binom{-x}{k} = (-1)^k\cdot\binom{k-1+x}{k}$$ (c) $$\binom{n/m}{k} = (-1)^k\prod_{j=1}^{k}\frac{m\cdot(j-1)-n}{m\cdot j}$$

(204) $$\Gamma(1+z)\cdot\Gamma(1-z) = z\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = -z^2\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma(-z) = \frac{\pi\cdot z}{sin(\pi\cdot z)}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(205) $$\psi(z) := \frac{d}{dz}\,ln\,\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \qquad z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

Die logarithmische Ableitung von (204) liefert

(206) $$\psi(1+z)-\psi(1-z) = \frac{1}{z}+\psi(z)-\psi(1-z) = \frac{1}{z}-\pi\cdot cot(\pi\cdot z),$$

(207) (a) $$\psi(1+z) = \frac{1}{z}+\psi(z), \qquad \psi(n+z) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+z}+\psi(z),$$

(b) $$\lim_{z\to 0} z\cdot\psi(z) = -1,$$

(208) $$\psi(1-z) = \pi\cdot cot(\pi\cdot z)+\psi(z),$$

siehe (28): $$\psi(1-z) = -\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-z}-\frac{1}{n}\right].$$

Aus (28) und (207) folgt

(209) (a) $\frac{d}{dz}\psi(1 \pm z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \pm z)^2}, \quad \frac{d}{dz}\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \frac{\pi^2}{sin^2(\pi \cdot z)}.$

(210) $\psi(1) = -\gamma, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \cdot ln(2), \quad \psi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \gamma - 2 \cdot ln(2),$

$\psi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3} - \gamma - 2 \cdot ln(2), \qquad \psi\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{46}{15} - \gamma - 2 \cdot ln(2).$

(211) (a) $arg\,\Gamma(1 + i\,z) = \lim_{m \to \infty}\left[x \cdot ln(m) - \sum_{n=1}^{m-1} arctan\left(\frac{x}{n-y}\right)\right], \quad z = x + i\,y, \quad y \neq n,$

(b) $arg\,\Gamma(1 + i\,z) = x \cdot \psi(1-y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n-y} - arctan\frac{x}{n-y}\right].$ (**Anhang B**).

Die HURWITZsche Zetafunktion $\zeta(s, z)$ mit dem komplexen Parameter $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ ist eine auf der komplexen s-Ebene meromorphe Funktion mit dem einfachen Pol $s = 1$.
Sie ist die analytische Fortsetzung der in (212) definierten Reihe.

Die folgenden Eigenschaften sind nur für reelles $s = x > 0,\ x \neq 1$ *formulier*t.

(212) $\zeta(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^x}, \quad x > 1,$

$\zeta(x, z) = \lim_{N \to \infty}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+z)^x} - \frac{(N+z)^{1-x}}{1-x}\right], \quad x > 0,\ x \neq 1.$

(213) $\zeta(x) = \zeta(x, 1)$. Die RIEMANNsche Zetafunktion (2), (3) ist ein Spezialfall.

(214) $0 < \zeta(k) - 1 < \frac{1}{2^{k-2}}, \; k \geq 2$ (**Anhang B**).

(215) $\zeta(x, z) - \zeta(x) = \frac{1}{z^x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+z)^x} - \frac{1}{n^x}\right], \quad \lim_{x \to 1}\,[\zeta(x, z) - \zeta(x)] = -\gamma - \psi(z)$

(216) $\zeta(x, z) - \zeta(x, 1+z) = \frac{1}{z^x}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

(217) $$\frac{d}{dz}\zeta(x,z) = -x\cdot\zeta(1+x,z)\ ,\quad \frac{d^n}{dz^n}\zeta(x,z) = (-1)^n\cdot\frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(x)}\cdot\zeta(n+x,z)$$

(218) $$\zeta(2,z) = \frac{d}{dz}\psi(z)\ ,\quad \zeta(n+1,z) = \frac{-1}{n}\cdot\frac{d}{dz}\zeta(n,z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\psi(z),\quad n\ge 2$$

.

(219) $$\zeta\left(x,\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^x}{(2n+1)^x} = \left(2^x-1\right)\cdot\zeta(x)\ ,\ x>1\ .$$

(220) $$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\cdot\left|B_{2m}\right|\cdot\pi^{2m}$$ (BERNOULLI - Zahlen B_{2m}) **(Anhang B)**

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\quad \zeta\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2},\ \zeta\left(4,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{6},\ \zeta\left(6,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^6}{15}.$$

Einige Integralformeln

Aus den Integralen ($t\ge 0$)

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^n\,dt$$ (Integraldefinition der Gammafunktion)

$$\int e^{-a\cdot t}\cdot\cos(b\cdot t)dt = \frac{e^{-a\cdot t}}{a^2+b^2}\cdot(-a\cdot\cos(b\cdot t)+b\cdot\sin(b\cdot t))$$

$$\int e^{-a\cdot t}\cdot\sin(b\cdot t)dt = \frac{e^{-a\cdot t}}{a^2+b^2}\cdot(-a\cdot\sin(b\cdot t)-b\cdot\cos(b\cdot t))$$

folgen mit $a=1/z$, $b=n^{-\lambda}$ für $\underline{\operatorname{Re}(z)>0}$ die LAPLACE-Transformationen

(221) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}}\cdot t^n\,dt = z^{n+1}\cdot n!$$

(222) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}}\cdot\cos\left(\frac{t}{n^\lambda}\right)dt = \frac{1}{z^{-2}+n^{-\lambda\cdot 2}}\cdot\frac{1}{z} = \frac{z\cdot n^{2\lambda}}{n^{2\lambda}+z^2}$$

(223) $$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}}\cdot\sin\left(\frac{t}{n^\lambda}\right)dt = \frac{1}{z^{-2}+n^{-\lambda\cdot 2}}\cdot\frac{1}{n^\lambda} = \frac{z^2\cdot n^\lambda}{n^{2\lambda}+z^2}\ .$$

Für das Fehlerintegral $\Phi(x)$ und die FRESNEL- Integrale $S(x)$, $C(x)$ gelten mit $t = z \big/ n^{\lambda/2}$

(224) $\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt\,,$ $\Phi(\infty) = 1\,,$ $\int\limits_0^x e^{\frac{-z^2}{n^\lambda}}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot n^{\lambda/2} \cdot \Phi\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right)$

(225) $S(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \sin\left(t^2\right) dt\,,$ $S(\infty) = \frac{1}{2}\,,$ $\int\limits_0^x \sin\left(\frac{z^2}{n^\lambda}\right) dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot n^{\lambda/2} \cdot S\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right)$

(226) $C(x) := \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \cos\left(t^2\right) dt\,,$ $C(\infty) = \frac{1}{2}\,,$ $\int\limits_0^x \cos\left(\frac{z^2}{n^\lambda}\right) dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot n^{\lambda/2} \cdot C\left(\frac{x}{n^{\lambda/2}}\right).$

Anhang B Beweise

Beweise einiger der im Text aufgestellten Behauptungen und Formeln

Beweis der Formel **(30)**.

Mit $a_k(\lambda, m) := \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \frac{1}{(i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k)^\lambda}$ folgt durch vollständige Induktion nach m

$$\prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{n^\lambda} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \cdot a_k(m) \cdot z^k .$$

Denn wegen $a_k(\lambda, m) + a_{k-1}(\lambda, m) \cdot \frac{1}{(m+1)^\lambda} = a_k(\lambda, m+1)$, $a_0(\lambda, m) := 1$, $a_{m+1}(\lambda, m) := 0$,

gilt $\prod\limits_{n=1}^{m+1} \left(1 - \frac{z}{n^\lambda} \right) = \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k \cdot a_k(\lambda, m) \cdot z^k \right) \cdot \left(1 - \frac{z}{(m+1)^\lambda} \right)$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \cdot \left(a_k(\lambda, m) + a_{k-1}(\lambda, m) \cdot \frac{1}{(m+1)^\lambda} \right) \cdot z^k = 1 + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \cdot a_k(\lambda, m+1) \cdot z^k .$$

Mit $a_k(\lambda) = \lim\limits_{m \to \infty} a_k(\lambda, m)$ und $P_0(z, \lambda) = \lim\limits_{m \to \infty} \prod\limits_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{n^\lambda} \right)$ folgt die Behauptung

(*für alle z aus dem Konvergenzbereich der Reihe*).

Der Wert für $a_k(2)$ folgt aus dem Koeffizientenvergleich mit der Taylorreihe von (25) :

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k(2) \cdot z^{2 \cdot k} = P_0\left(z^2, 2\right) = \frac{\sin(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\pi^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k + 1)!} \cdot z^{2 \cdot k} .$$

Mit der Produktformel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{m+n} \cdot b_n + a_n \cdot b_{m+n} \right)$ folgt

$$\zeta(\lambda)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\lambda}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^\lambda \cdot (m+n)^\lambda} = \zeta(2 \cdot \lambda) + 2 \cdot a_2(\lambda) .$$

Anmerkung zu (30): Aus der beständigen Konvergenz der Reihe für $\lambda = 2$ folgt auch die der Reihen für $\lambda > 2$.
Die Reihen (94) u_1, v_1, u_2, v_2 und $P_0(z, \lambda)$ sind dann ebenfalls beständig konvergent!

Beweis der Formel **(20)(b)**

$$z\cdot Q_\mu(z,\lambda)-Q_{\mu-\lambda}(z,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\left\{\left(\frac{z}{z-n^\lambda}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0}\frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k}}\right)-\left(\frac{n^\lambda}{z-n^\lambda}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu+\lambda}{\lambda}\right]_0}\frac{z^{k-1}}{n^{\lambda\cdot k-\lambda}}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\cdot\left\{\frac{z-n^\lambda}{z-n^\lambda}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0}\frac{z^k}{n^{\lambda\cdot k}}-\sum_{k=1}^{\left[\frac{1-\mu}{\lambda}\right]_0+1}\frac{z^{k-1}}{n^{\lambda\cdot(k-1)}}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\mu}\left\{1-\frac{z^0}{n^0}\right\}=0\,.$$

Beweis der Formeln **(33)** und **(34)**

$$\frac{P_{-1}(1-z,1)}{P_{-1}(-z,1)}=\lim_{N\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n-1+z}{n+z}\right)^n\cdot e^{1+\frac{1}{2\cdot n}-\frac{z}{n}}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{z\cdot(1+z)^2\cdot(2+z)^3\cdot\ldots\cdot(N-1+z)^N}{(1+z)^1\cdot(2+z)^2\cdot\ldots\cdot(N-1+z)^{N-1}\cdot(N+z)^N}\cdot e^{N+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(N+z)}{\Gamma(z)}\cdot\frac{e^N}{(N+z)^N}\cdot e^{\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-ln(N)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)+ln(N)\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)}$$

$$=\frac{e^{-z}}{\Gamma(z)}\cdot\left[\lim_{N+z\to\infty}\frac{\Gamma(N+z)\cdot e^{N+z}}{(N+z)^{N+z-1/2}}\right]\cdot\lim_{N\to\infty}e^{-ln(N+z)\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)+ln(N)\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)}\cdot e^{\gamma\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)}$$

$$=\frac{e^{-z+\gamma\cdot\left(\frac{1}{2}-z\right)}}{\Gamma(z)}\cdot\left[\sqrt{2\cdot\pi}\right]\cdot\lim_{N\to\infty}e^{\left(\frac{1}{2}-z\right)\cdot ln\left(\frac{N}{N+z}\right)}=\frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{\Gamma(z)}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}-(1+\gamma)\cdot z}\cdot e^0\,.$$

Auf den Grenzwert [...] wurde die STIRLINGschen Formel angewendet.

Aus (19) folgt mit (33) und (202), (204) die Formel (34).

Induktionsschluß von k auf k+1 für Formel **(70)**

$$\frac{d}{dz}\left[z^{k+1}\cdot ln\,P_\mu(z,\lambda)-ln\,P_{\mu-(k+1)\cdot\lambda}(z,\lambda)\right]$$

$$=\frac{d}{dz}\left[z\cdot\left(z^k\cdot ln\,P_\mu(z,\lambda)-ln\,P_{\mu-k\cdot\lambda}(z,\lambda)\right)+\left(z\cdot ln\,P_{\mu-k\cdot\lambda}(z,\lambda)-ln\,P_{\mu-k\cdot\lambda-\lambda}(z,\lambda)\right)\right]$$

$$=\left(z^k\cdot ln\,P_\mu(z,\lambda)-ln\,P_{\mu-k\cdot\lambda}(z,\lambda)\right)+z\cdot\left(k\cdot z^{k-1}\cdot ln\,P_\mu(z,\lambda)\right)+\left(ln\,P_{\mu-k\cdot\lambda}(z,\lambda)\right)$$

$$=(k+1)\cdot z^k\cdot ln\,P_\mu(z,\lambda)$$

Beweis der Formel **(211)**.

Sei $u := i \cdot z = -y + i\,x$.
Aus $arg\,\Gamma(1+u) + arg(1+u) = arg[(1+u)\cdot\Gamma(1+u)] = arg\,\Gamma(2+u)$ folgt durch Induktion

(*) $$arg\,\Gamma(m+u) = arg\,\Gamma(1+u) + \sum_{n=1}^{m-1} arg(n+u) = arg\,\Gamma(1+u) + \sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{x}{n-y}.$$

Aus (200) und (202) folgt $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\Gamma(m)\cdot m^u}{\Gamma(m+u)} = 1$ mit $m^u = e^{(-y+i\,x)\cdot ln(m)}$ und für das Argument

$$arg\,\Gamma(m) + arg\left(m^u\right) - arg\,\Gamma(m+u) = 0 + x\cdot ln(m) - arg\,\Gamma(m+u) \to arg(1) = 0 \quad \text{für} \quad m\to\infty.$$

Mit (*) gilt also (211) (a): $$arg\,\Gamma(1+u) = \lim_{m\to\infty}\left[x\cdot ln(m) - \sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{x}{n-y}\right].$$

(211) (b) folgt aus (28), (4) und der Erweiterung

$$\left[\cdots\right] = \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{x}{n-y} - arctan\frac{x}{n-y}\right) - \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{x}{n-y} - \frac{x}{n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{x}{n} - x\cdot ln(m)\right).$$

Beweis der Formel **(214)**

$$0 < \zeta(k) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\cdot n^{k-1}} = \frac{1}{2}\cdot(\zeta(k-1)-1) < \frac{1}{2^{k-2}}, \quad k>1.$$

Die rechte Ungleichung ergibt sich durch Induktion und $\zeta(2) - 1 < \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)\cdot n} = 1$.

Herleitung der Beziehung **(220)**

Mit der Substitution $z := \dfrac{u}{2\pi}$ erhält (50) die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\cdot u^{2k} = \frac{u}{2}\cdot coth\left(\frac{u}{2}\right) - 1 = \frac{u}{2}\cdot\left[\frac{2}{e^u-1}+1\right] - 1 = \frac{u}{e^u-1} + \frac{u}{2} - 1 \quad \text{bzw.}$$

$$g(u) := \frac{u}{e^u-1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot u + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2\cdot\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}\cdot u^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\cdot u + \frac{2\cdot\zeta(2)}{(2\pi)^2}\cdot u^2 - \frac{2\cdot\zeta(4)}{(2\pi)^4}\cdot u^4 + -\ldots$$

Laut Definition ist $g(u)$ die erzeugende Funktion der BERNOULLIschen Zahlen

$$g(u) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}\cdot u^k = B_0 + B_1\cdot u + \frac{B_2}{2!}\cdot u^2 + \frac{B_3}{3!}\cdot u^3 + \frac{B_4}{4!}\cdot u^4 + \ldots\ .$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Beziehungen

$$B_0 = 1\ ,\ B_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ B_{2k+1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \underline{\frac{B_{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2 \cdot \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}}\ .$$

Da die B_k *aus dem Produkt der Potenzreihen* $g(u) \cdot \frac{1}{g(u)} = 1$ *rekursiv (durch rationale Operationen) ermittelt werden können, sind die* $\zeta(2k)$ *bekannt.* (EULER.)

Beweis der Transformationsregel **R(10)**

Wir bilden eine beliebige Folge $F_{\lambda_m,\mu}$ mit $\lambda_m = (\lambda_{m-1} + r_m) \to \infty$, $r_m > 0$, $m = 1,2,\ldots$.

Für hinreichend großes λ_0 ist dann $F_{\lambda_m,\mu}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) \cdot z^k$.

Es ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein m_0 existiert, so dass für alle $m > m_0$ folgende Abschätzung gilt

$$\left| F_{\lambda_m,\mu}(z) - f(z) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot [\zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) - 1] \cdot z^k \right| < \varepsilon .$$

Wegen
$$\begin{aligned}
[\zeta(\lambda_m \cdot k + \mu) - 1] &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda_m \cdot k + \mu}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{r_m \cdot k}} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_{m-1} \cdot k + \mu}} \\
&< \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda_{m-1} \cdot k + \mu}} = \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_{m-1} \cdot k + \mu) - 1] \\
&< \frac{1}{2^{r_m \cdot k}} \cdot \frac{1}{2^{r_{m-1} \cdot k}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2^{r_1 \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1]
\end{aligned}$$

und
$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_m - \lambda_0$$

folgt
$$\begin{aligned}
\left| F_{\lambda_m,\mu}(z) - f(z) \right| &< \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2^{(\lambda_m - \lambda_0) \cdot k}} \cdot [\zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1] \cdot z^k \right| \\
&< \frac{1}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot \left| \zeta(\lambda_0 \cdot k + \mu) - 1 \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k \right| = \frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot |f(z)| .
\end{aligned}$$

Offensichtlich existiert ein $m_0 = m_0(\varepsilon, z)$ mit $\frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot |f(z)| < \varepsilon$ für $m > m_0$.

Für $|z| \le \rho < r$ ist $f(z)$ beschränkt, $|f(z)| < M$, d. h. es existiert ein von z unabhängiges m_0 mit $\frac{konst.}{2^{(\lambda_m - \lambda_0)}} \cdot M < \varepsilon$. Die Konvergenz ist gleichmäßig.

Anhang C Beispiel

Eine geometrische Deutung des Grenzwertes η

Die Punktfolge $z_1 = 1,\ z_m = \prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\ (m>1)$ bildet einen Streckenzug in der komplexen Ebene, der sich in seinem Verlauf einer Archimedischen Spirale annähert.

Siehe POLYA/SZEGÖ [P/S] *Band* 1, III. *Abschnitt, Aufgabe* 42.

Genauer:

Die Spirale $\underline{r(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot(\varphi + r_0)}$ mit $\underline{r_0 = \eta - \zeta\left(\frac{1}{2}\right)}$ approximiert den Streckenzug z_m.

Der Winkel $\varphi \geq 0$ wächst im mathematisch positiven Drehsinn unbegrenzt.

Begründung, (*siehe Definitionen von η in* (114)(d) *Seite 30 und $\zeta(1/2)$ nach* (3) *Seite 1*):

In der Polarform $z_m = r_m \cdot exp(i\cdot\varphi_m)$ gilt $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$ und für $m > 1$

$$r_m = |z_m| = \prod_{n=1}^{m-1}\left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right| = \prod_{n=1}^{m-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{m} \quad , \quad \varphi_m = \sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{1}{\sqrt{n}} = \varphi_{m-1} + arctan\frac{1}{\sqrt{m-1}} .$$

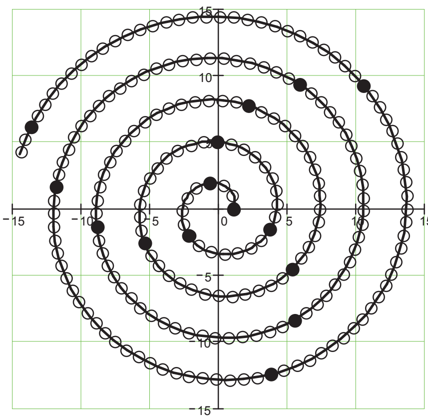
Daraus folgt, dass die Abweichung $\Delta_m = r(\varphi_m) - r_m$ für $m \to \infty$ gegen Null konvergiert:

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_m = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{m-1} arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \eta - \zeta\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \sqrt{m}\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{n=1}^{m-1} arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\cdot\sqrt{m-1}\right) - 2\cdot\sqrt{m}\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\sqrt{m-1} - \sqrt{m}\right] = \lim_{m\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{m-1}+\sqrt{m}} = 0 .$$

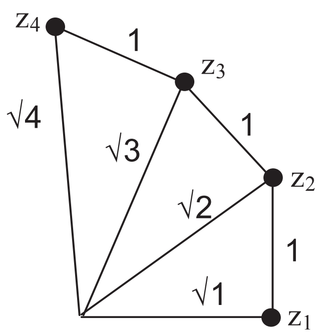
Grafische Darstellung



—— Spirale $r(\varphi)$

o Punkte z_m, • Punkte z_{m^2}

Der Streckenzug lässt sich iterativ konstruieren. Man trägt jeweils im Punkt z_{m-1} senkrecht auf r_{m-1} die Strecke 1 ab und erhält z_m .



Literatur (References)

[G/R] Gradstein I.S./ Ryshik I.M. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln* H.Deutsch, Thun Frankfurt **1981**

[A/S] Abramowitz, M. / Stegun, I. (eds.) *Pocketbook of Mathematical Functions* H. Deutsch, Thun - Frankfurt **1984**

[A] Apelblat, A. *Tables of Integrals and Series* H. Deutsch, Thun - Frankfurt **1996**

[W] Weisstein, E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* CRC Press, N.York **1999**

[F] Finch, St. R. *Mathematical Constants* Cambridge Univ.Press, N.York **2003**

[P/S] Pólya, G. / Szegö, G. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (2 Bände)* Springer, Berlin **1925**

[K] Knopp, K. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (4. ed.)* Springer, Berlin **1947**

W/W] Whittaker E.T. / Watson G.N. *A Course of Modern Analysis (4. ed.)* Cambridge Univ. Press **1962**

[Fi] Fichtenholz, G. M. *Differential- und Integralrechnung II (3. ed.)* DVW, Berlin **1971**

[St] Stopp, F. *Operatorenrechnung (4.ed.)* Teubner, Leipzig **1987**

[Koe] Koecher,M. *Klassische elementare Analysis* Birkhäuser, Basel **1987**

[F/B] Freitag, E. / Busam, R. *Funktionentheorie* Springer, Berlin, Heidelberg, N.York **1993**

[S/C] H. M. Srivastava / Junesang Choi *Series Associated with the Zeta and Related Functions* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands **2001**

[[Iv] Ivic, A. *The Riemann Zeta-Function* Dover Publications, Mineola, N.York **2003**

[c/s/q] J. Choi / H. M. Srivastava / J. R. Quine, *Some series involving the Zeta function* Bull. Austral. Math. Soc. **51** (**1995**), 383-393

[f/v] Ph. Flajolet / I. Vardi *Zeta Functions Expansion of Classical Constants* http://pauillac.inria.fr/algo/flajolet/Publications/landau.ps (**1996**)

[c/s1] J. Choi, / H. M. Srivastava *Sums associated with the Zeta function* J. Math. Anal. Appl. **206** (**1997**) 103-120

[a/s] V. S.Adamchik. / H. M. Srivastava *Some Series of the Zeta and Related functions* Analysis, **18** (**1998**), 131-144

[s] H. M. Srivastava *Some rapidly converging series for* $\zeta(2n+1)$ Proc. Amer. Math. Soc. **127** (**1999**) 385-396

[s/g/a] H. M. Srivastava / M.L. Glasser / V. S. Adamchik *Some definite integrals associated with the Riemann Zeta function* ZAA **19** (**2000**) 831-846

[wu] Wu Yung-Fei *New series involving the Zeta function* IJMMS **28**:7 (**2001**) 403-411

[c/s2] J. Choi, / H. M. Srivastava *A certain family of series associated with the Zeta and related Functions* Hiroshima Math. J**. 32** (**2002**) 417-429

[Slo] Sloane *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* www.research.att.com/~njas

[Wo] Wolfram Research *Riemanns u. Hurwitz´s Zetafunktion* http://functions.wolfram.com *mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html , .. /HurwitzZetaFunction.html, …,(div. links).*

[Sr] Gerhard Strey *Reihen aus Werten der Riemannschen Zetafunktion (1. Entwurf **2007**)* http://www.sr-strey.de/41314.html