

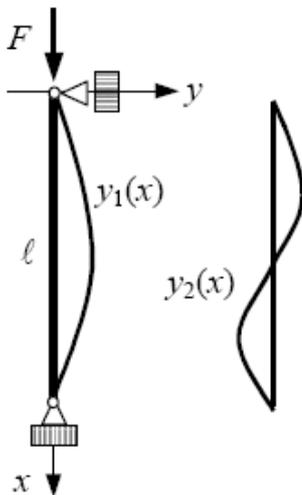
Eulersche Knicklasten und Primzahlformeln

In den folgenden Ausführungen versuche ich an einem Beispiel zu zeigen, dass das „und“ in dem Titel keine reine *Aufzählung* ist, sondern auch auf interessante *Verknüpfungen* zwischen so weit entlegenen Disziplinen wie die technisch orientierte Analysis und die häufig im Geruch der Esoterik stehende Zahlentheorie hinweist.

Ich beginne mit zwei den Bauingenierstudenten vertrauten Beispielen.

1. Der Eulersche Knickfall II Leonhard Euler: „Theorie der Knickung“ 1744

Ein vertikal belasteter (homogener) Stab der Länge ℓ sei gelenkig gelagert. Gesucht ist die seitliche Auslenkung $y(x)$ unter der Last F .



Das Problem führt auf eine Differentialgleichung

$$-y'' = k^2 \cdot y$$

mit den Randwerten $y(0) = y(\ell) = 0$.

Der Faktor $k^2 = \frac{F}{EI} =: \frac{1}{\lambda}$ enthält die Last F und die Biegesteifigkeit EI .

Der Kehrwert werde mit λ bezeichnet.

Die Differentialgleichung besitzt die bekannte allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x)$$

Aus den Randwerten folgt für die Konstanten $\Rightarrow C_2 = 0 \quad C_1 \cdot \sin(k \cdot \ell) = 0$.

Die zweite Bedingung wird erfüllt für a) $C_1 = 0 \quad y(x) \equiv 0$, b) $k = 0 \quad F = 0$
c) $k \cdot \ell = n \cdot \pi$, $n = 1, 2, \dots$.

In den Fällen a), b) erfolgt keine Auslenkung. Im Fall c) erfolgt die Auslenkung für die diskreten

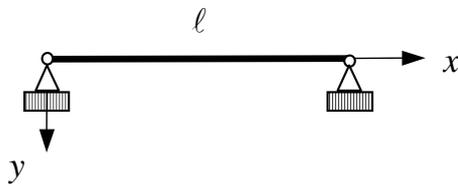
Eigenwerte $\lambda_n = \frac{1}{k^2} = \frac{\ell^2}{\pi^2 \cdot n^2}$ mit den Eigenfunktionen $y_n(x) = C_1 \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{\ell}\right)$.

Für den Bauingenieur ist alleine die erste Auslenkung $n = 1$ von Bedeutung.

Sie liefert die Formel für die begrenzende „Knicklast“ $F_k = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$

2. Biegeschwingung

Ein homogener Träger auf zwei Stützen werde in transversale Biegeschwingungen versetzt. Gesucht sind die Schwingungsformen $y(x)$ des Trägers.



Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$-y^{(4)} = k^4 \cdot y$$

mit den Randwerten $y(0) = y(\ell) = 0 \quad y''(0) = y''(\ell) = 0$.

Der Faktor $k^4 = \frac{\rho \cdot A}{EI} \cdot \omega^2 =: \frac{1}{\lambda}$ enthält die Biegesteife EI , die Dichte ρ , den Trägerquerschnitt A und die Kreisfrequenz ω .

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) + C_3 \cdot \sinh(k \cdot x) + C_4 \cdot \cosh(k \cdot x).$$

Aus den Randwerten folgt $\Rightarrow C_2 = C_3 = C_4 = 0 \quad C_1 \cdot \sin(k \cdot \ell) = 0$ mit den

Lösungen a) $C_1 = 0 \quad y(x) \equiv 0$ b) $k = 0 \quad \omega = 0$ c) $k \cdot \ell = n \cdot \pi, n = 1, 2, \dots$

Der Fall c) liefert für die

Eigenwerte $\lambda_n = \frac{1}{k^4} = \frac{\ell^4}{\pi^4 \cdot n^4}$ die Schwingungsformen $y_n(x) = C_1 \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{\ell}\right)$.

Der Träger schwingt sinusförmig und besitzt eine mit n wachsende Anzahl von Schwingungsknoten.

Auch hier interessiert den Bauingenieur vorrangig die Grundschiwingung $n = 1$ mit der

Formel für die Eigenfrequenz $f_e = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\pi}{2 \cdot \ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A}}$

Wir richten in den weiteren Ausführungen jedoch unser Augenmerk auf die Folgen λ_n der Eigenwerte.

Ansatz mittels Greenscher Funktionen Georg Green (1793 – 1841)

Die behandelten Randwertaufgaben können statt mit Differentialgleichungen auch mit Integralgleichungen beschrieben werden.

Zu jedem Problem existiert genau eine (Greensche) Funktion $G(x, \xi)$, die u. a. folgende Eigenschaften hat, (zur Vereinfachung sei $\ell = 1$ gesetzt):

(1) $G(x, \xi)$ erfüllt die Randbedingungen.

(2) Für alle Eigenfunktionen und Eigenwerte gilt

$$\int_0^1 G(x, \xi) \cdot y_n(\xi) d\xi = \lambda_n \cdot y_n(x).$$

(3) G ist symmetrisch: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

(4) Es gilt die sogenannte „Spurformel“

$$\int_0^1 G(x, x) dx = \sum_n \lambda_n.$$

Ein Integral der Form $\int_0^1 G(x, \xi) \cdot y(\xi) d\xi = u(x)$ ist ein „Operator“ \mathbf{G} , der einer Funktion $y(x)$ eine Funktion $u(x)$ zuordnet. Formal dargestellt: $\mathbf{G} y = u$. Die Formel (2) beschreibt also das Eigenwertproblem $\mathbf{G} y = \lambda y$.

Ein aufmerksamer Student wird hier die Analogie zum Eigenwertproblem $A y = \lambda y$ symmetrischer Matrizen $A^T = A$ erkennen, (z.B. bei der Hauptachsentransformation oder der Ermittlung der Hauptträgheitsmomente).

Dort ist ihm auch (als Rechenkontrolle) die Spurformel begegnet: $\sum_n a_{nn} = \sum_n \lambda_n$.

Die Summe der Diagonalelemente (= Spur!) ist gleich der Summe der Eigenwerte der Matrix A .

Anwendung der Spurformel

Um die Spurformel auf unsere Beispiele anzuwenden, benötigen wir die Greenschen Funktionen. Ohne auf die Ermittlungsmethodik einzugehen, führe ich die beiden Funktionen an ($\bar{x} = 1 - x$, $\bar{\xi} = 1 - \xi$):

$$\begin{aligned} 1) \text{ Knickung} \quad G(x, \xi) &= \begin{cases} x \cdot \bar{\xi} & \text{für } x \leq \xi \\ \xi \cdot \bar{x} & \text{für } \xi \leq x \end{cases} \\ 2) \text{ Schwingung} \quad G(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{1}{6} x \cdot \bar{\xi} \cdot (1 - x^2 - \bar{\xi}^2) & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{1}{6} \xi \cdot \bar{x} \cdot (1 - \xi^2 - \bar{x}^2) & \text{für } \xi \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

Ein Fachmann erkennt in der Formel 1) die Momentenlinie eines gelenkig gelagerten Stabs unter einer Einzellast **1** an der Stelle $x = \xi$. Formel 2) ist die entsprechende Biegelinie!

Wir wenden die Spurformel an und haben sehr einfache Integrale zu lösen:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda_n &= \frac{1}{\pi^2 \cdot n^2} & \sum_n \frac{1}{n^2 \cdot \pi^2} &= \sum_n \lambda_n = \int_0^1 G(x, x) dx = \int_0^1 x \cdot (1-x) dx = \frac{1}{6} \\ 2) \quad \lambda_n &= \frac{1}{\pi^4 \cdot n^4} & \sum_n \frac{1}{n^4 \cdot \pi^4} &= \sum_n \lambda_n = \int_0^1 \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot (1-x)^2 dx = \frac{1}{90} \end{aligned}$$

Das sind die bekannten Eulerschen Reihen (1736)!

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

Die besten Mathematiker ihrer Zeit hatten vergeblich nach der Summe der reziproken Quadratzahlen gesucht. Auch heute noch beeindruckt diese Eulersche Formel!

Hier sind uns gewissermaßen diese Formeln als „Nebenprodukt“ der Anwendung der Analysis auf bautechnische Fragestellungen zugefallen.

Diese Summen sind jedoch andererseits der Ausgangspunkt tiefliegender Aussagen über die Verteilung der Primzahlen!

Eulersches Produkt und die Zetafunktion

Euler fand diese Formeln in einem völlig anderem Zusammenhang und konnte sie

auf alle geraden Exponenten verallgemeinern: $\sum_n \frac{1}{n^{2 \cdot k}} = A_k \cdot \pi^{2 \cdot k}$, A_k rational.

Entscheidend war jedoch sein Gedanke, die Summe als Funktion des Exponenten s zu untersuchen.

Dies ist die zahlentheoretisch wichtige Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

1737 fand Euler für beliebige reelle Exponenten $s > 1$ die berühmte Produktdarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \dots = \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{3^s}{3^s - 1} \cdot \frac{5^s}{5^s - 1} \cdot \dots$$

p durchläuft alle Primzahlen!

Dies war der Beginn der analytischen Zahlentheorie.

So schlussfolgerte Euler aus der Produktdarstellung für $s \rightarrow 1$, dass es unendlich viele Primzahlen gibt:

Die harmonische Reihe $\sum_n \frac{1}{n^1}$ ist divergent, also kann das Produkt $\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$ nicht

nur endlich viele Faktoren haben.

Die Riemannsche Zetafunktion

Bernhard Riemann (1826 –66)

Entscheidende Fortschritte lieferte Riemann, der die Zetafunktion in der komplexen Ebene analytisch fortsetzte und die Nullstellen und Pole von $\zeta(s)$ untersuchte.

Die Zetafunktion hat

Betragsfläche $|\zeta(s)|$

1) genau einen Pol

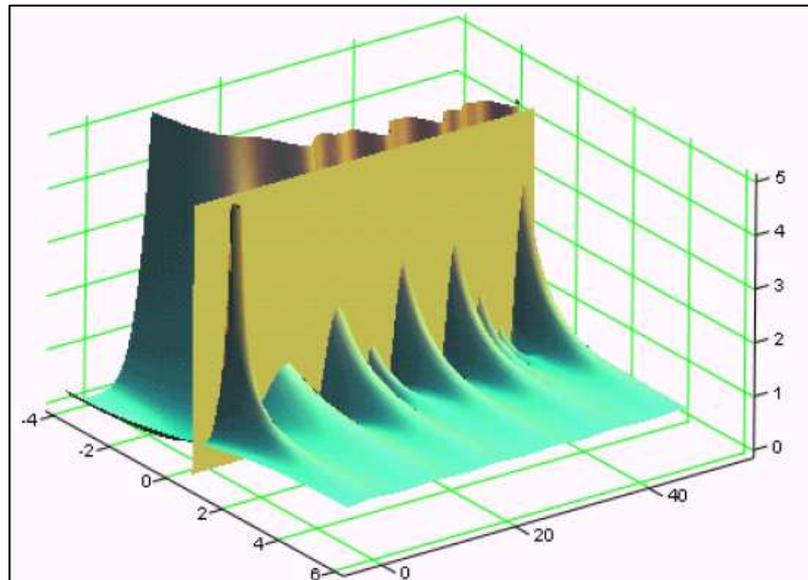
$$s = 1$$

2) unendlich viele reelle Nullstellen

$$s = -2 \cdot n$$

3) unendlich viele komplexe Nullstellen

$$\rho_{\pm n} = \frac{1}{2} \pm t_n \cdot i$$



Die komplexen Nullstellen sind unregelmäßig verteilt und damit unvollkommen bekannt. Täglich werden aber mittels Computerprogramme zig-tausende neu ermittelt.

Es gibt die *Riemannsche Vermutung*, dass alle komplexen Nullstellen den Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Dies gilt bisher auch für alle gefundenen Nullstellen.

Das ist aber kein Beweis! Für einen Beweis winken gegenwärtig **1 Mill. \$**

Die Bedeutung der Kenntnisse der Nullstellen der Zetafunktion liegt in der Tatsache, dass die Verteilung der Primzahlen eng mit ihnen verknüpft ist.

Dies folgt aus Riemanns fundamentalem Artikel (1858)

„Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“,

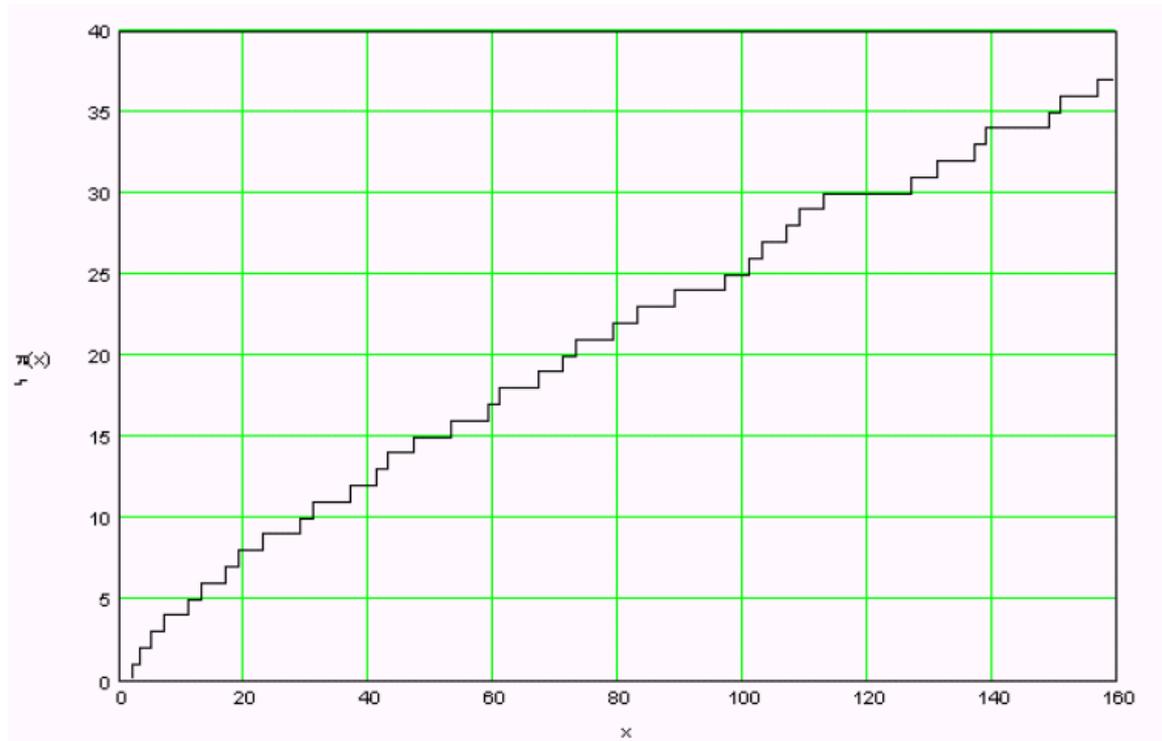
in dem er auch eine erstaunliche explizite Primzahlformel angegeben hat.

Die Verteilungsfunktion der Primzahlen

Durch Zählen der Primzahlen im reellen Intervall $[0,x]$ erhalten wir die Anzahlfunktion

$$\pi(x) = \text{Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich } x,$$

die uns einen Eindruck über die Verteilung der Primzahlen vermittelt.



Das Bild zeigt eine Treppenfunktion, die an jeder Primzahlstelle um eine Stufe der Höhe 1 anwächst. Die Lage und Breite dieser Stufen scheint völlig regellos zu sein. Es gibt beliebig breite Stufen, aber auch immer wieder unverhofft Stufen der Breite 2 (Primzahlzwillinge).

Zum Beispiel erkennt man die minimale Stufe $\pi(11) = \pi(12) = 5$, $\pi(13) = 6$ für die „Zwillinge“ 11 und 13, oder die längere Stufe $\pi(113) = \pi(126) = 30$, $\pi(127) = 31$ mit der Primzahllücke zwischen 113 und 127.

Umso erstaunlicher ist es, dass im Großen gesehen die Treppe wie an einem leicht gekrümmten straff gespannten Seil aufgehängt scheint, womit eine Gesetzmäßigkeit in der Verteilung erkennbar wird.

Diese Gesetzmäßigkeit formelmäßig zu erfassen oder zumindest Näherungen und gute Abschätzungen zu finden, hat viele große Mathematiker seit Euler bewegt und ist auch heute noch ein lebendiger Gegenstand der Forschung, die mit tiefliegenden mathematischen Methoden arbeitet.

Dabei ist die moderne Rechentechnik nur bedingt hilfreich, denn wenn auch die Primzahltabellen ständig erweitert werden, so sind sie doch nur ein verschwindender Abschnitt aus der unendlichen Folge der Primzahlen.

Rechenzeit und Speicherplatz wachsen ins Unermessliche. Die computergestützte Primzahlsuche beschränkt sich deshalb verstärkt auf speziell aufgebaute Zahlen (Mersenne-, Fermat-, Prothzahlen, ...).

Die Riemannsche Primzahlformel

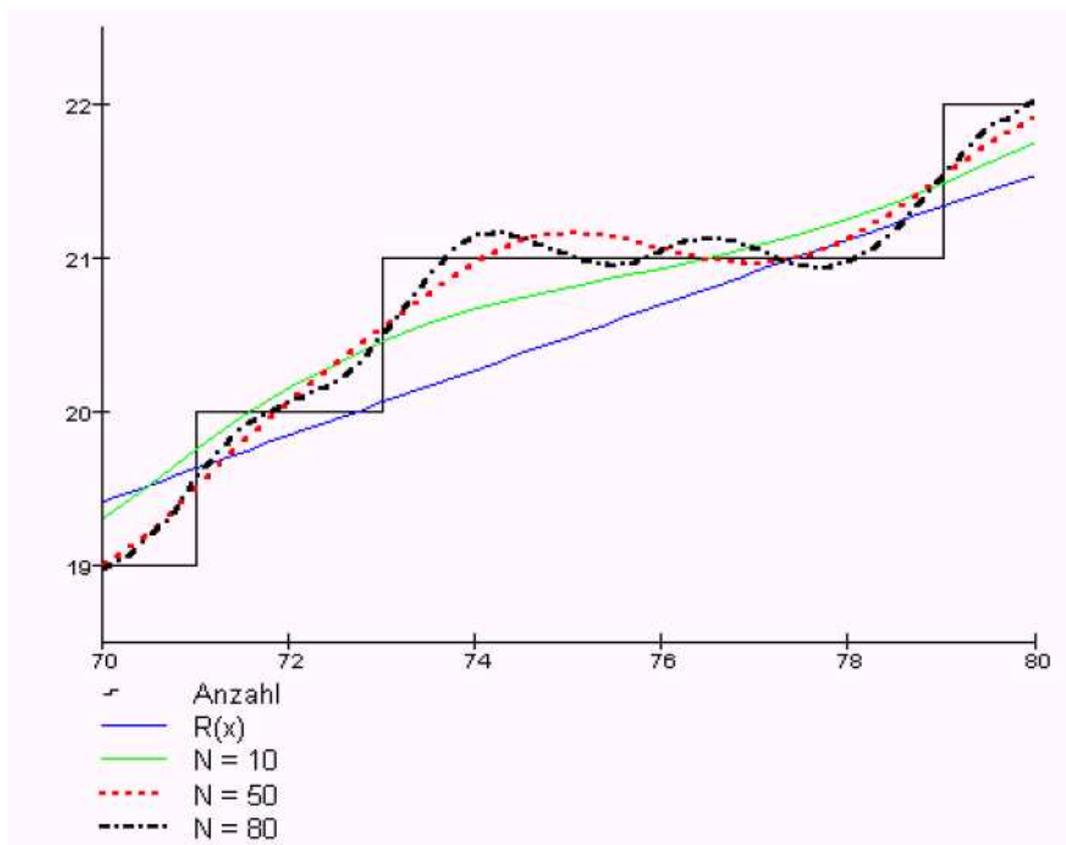
Die von Riemann 1858 aufgestellte Primzahlformel hat die Form einer Reihe, in deren Glieder der Pol und die Nullstellen der Zetafunktion eingehen. (*Siehe Anhang*).

Berücksichtigen wir in der Formel nur den Pol, so wird vorrangig der Verlauf im Großen beschrieben. Werden jedoch die komplexen Nullstellen hinzugenommen, so wird die Treppenform der Anzahlfunktion deutlich. Die reellen Nullstellen sind nahezu vernachlässigbar.

Zusammenfassend:

Mit wachsender Zahl der Nullstellen und Glieder der Riemanschen Formel wird $\pi(x)$ beliebig genau approximiert! Dies ähnelt einer „Fourier-Entwicklung“ von $\pi(x)$.

Im folgenden Bild wurden N komplexe Nullstellenpaare $\rho_{\pm n}$ verwendet. Für $N = 0$ erhält man die spezielle Riemannfunktion $R(x)$.



Hier beende ich meinen Exkurs, der uns von der Eulerschen Knicklast bis zur Riemanschen Primzahlformel geführt hat.

Angeregt wurde mein Beitrag durch den Artikel von *Grieser* (1). Dort sind weitere Beispiele für die Anwendung der Spurformel zu finden.

Näheres über die Primzahlen und ihre Verteilung wird von Peter Grobstich zum Abschluß des Kolloquiums vorgetragen. Siehe auch *Grobstich* (8).

Anhang

Die Riemannsche Primzahlformel

Li-Funktionen $Li(x) = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$ $li(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$

Riemann-Funktion $J(x) = J_P(x) - J_{KN}(x) - J_{RN}(x)$

Anteil des Pols $J_P(x) = Li(x^1)$ (Gauß ca. 1793, 16 Jahre)

Anteil der komplexen Nullstellen $J_{KN}(x) = \sum_{\rho} [Li(x^{\rho}) + Li(x^{\bar{\rho}})]$

Anteil der reellen Nullstellen $J_{RN}(x) = \sum_n li(x^{-2 \cdot n})$

Primzahlformel $\pi(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \cdot J\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$

Literatur

- (1) Daniel Grieser „Über Eigenwerte, Integrale und $\pi^2/6$: Die Idee der Spurformel“
Mathematische Semesterberichte (2007) Heft 54: S.199 - 217
 - (2) Lothar Collatz „Eigenwertaufgaben. Mit technischen Anwendungen.“
Geest & Portig, Leipzig 1949
 - (3) Harro Heuser „Gewöhnliche Differentialgleichungen“
B.G. Teubner, Stuttgart 1989
 - (4) Peter Grobstich, „Mathematik für Bauingenieure.
Gerhard Strey Grundlagen, Verfahren und Anwendungen mit Mathcad“
B.G. Teubner, Wiesbaden 2004
 - (5) Bernhard Riemann „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“
Monatsberichte der Berliner Akademie, Nov 1859
 - (6) H.M. Edwards „Riemann's Zeta Function“ Academic Press 1974
 - (7) Julian Havil „Gamma. Euler Konstante, Primzahlstränge
und Riemannsche Vermutung“ Springer, Berlin-Heidelberg 2007
 - (8) Peter Grobstich „Die Nullstellen der Zeta-Funktion und die Verteilung der Primzahlen“
Computer-Algebra-Symposium Konstanz 2007
 - (9) Gerhard Strey „Primzahlen und die Riemannsche Zetafunktion “
Ausarbeitung mit Mathcad (2008)
 - (10) www.zetagrid.net (Nullstellensuchprojekt)
-

Dieser Vortrag wurde anlässlich der Emeritierung von Prof. Dr. rer. nat. Grobstich am 23. 06. 2009 im Rahmen eines Ehrenkolloquiums an der Hochschule Neubrandenburg gehalten.
Er reflektiert in etwa auch (auf populärem Niveau) die fachwissenschaftlichen Interessen des Laureaten.

Veröffentlicht in der Schriften-Reihe J, Band 5 der Hochschule.
ISBN 978-3-932227-92-9