Gerhard Strey
h-g.strey@t-online.de
http://www.sr-strey.de

Hochschule Neubrandenburg
University of Applied Sciences

Einige Reihen, deren Glieder Werte der Zetafunktion enthalten

Die Zusammenstellung enthält Reihen, die nach einem einheitlichen Prinzip ermittelt wurden. Dieses ist in folgendem Artikel ausführlich dargelegt:

Gerhard Strey „Reihen aus Werten der Riemannschen Zetafunktion"

1. Verwendete Funktionen und Grenzwerte

$$k,n,m \in N\,,\ x,y,\alpha,\beta,\lambda,\mu \in R \quad z \in C$$

Binomialkoeffizient $\binom{x}{n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x-k}{k+1} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{k!}$

Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad x>1 \quad , \quad \zeta(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^x} - \frac{m^{1-x}}{1-x}\right) \quad 0<x<1$$

Euler-Konstante $\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - ln(m)\right) = 0.5772156649....$

Hurwitzsche Zetafunktion

$$\zeta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^x} \ ,\quad x>1\ ,\quad \zeta(x,z) = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+z)^x} - \frac{(N+z)^{1-x}}{1-x}\right],$$

$$0<x<1$$

$$\zeta(x,1) = \zeta(x)$$

Gammafunktion $\Gamma(z)$

$$\Gamma^{-1}(z) = z\cdot \hat{e}^{\gamma\cdot z}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot e^{-z/n}, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Digammafunktion

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} ln(\Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \qquad \psi(1) = -\gamma$$

2. Prinzipieller Ansatz zur Reihenentwicklung

Ausgehend von der Potenzreihe $f(z) = \sum_k a_k \cdot z^k$ erfolgt die Auswertung der Reihe

$$F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_k a_k \cdot \zeta(\lambda \cdot k + \mu) \cdot z^k = \sum_k a_k \cdot \sum_n \frac{1}{n^{\lambda \cdot k + \mu}} \cdot z^k = \sum_n \frac{1}{n^{\mu}} \cdot f\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right) .$$

3. Zusammenstellung der Reihen

3.1. Ausgangsreihe $\boxed{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot z^k = z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \frac{1}{3} \cdot z^3 + \ldots = -\ln(1-z)}$. $|z| \le 1$, $z \ne 1$

(1) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(k) \cdot z^k = \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) \cdot z^2 + \frac{1}{3}\zeta(3) \cdot z^3 + \frac{1}{4}\zeta(4) \cdot z^4 + \ldots = -\gamma \cdot z + \ln\Gamma(1-z)$$

$|z| \le 1$, $z \ne 1$

(1a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \zeta(k) = \frac{1}{2} \cdot \zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - + \ldots = \gamma$$

(1b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \cdot \zeta(k) = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \zeta(2) + \frac{1}{3 \cdot 8}\zeta(3) + \frac{1}{4 \cdot 16}\zeta(4) - + \ldots = -\frac{\gamma}{2} + \ln\left(\sqrt{\pi}\right)$$

(1c) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 2^k} \cdot \zeta(k) = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \zeta(2) - \frac{1}{3 \cdot 8}\zeta(3) + \frac{1}{4 \cdot 16}\zeta(4) - + \ldots = \frac{\gamma}{2} + \ln\left(\sqrt{\pi}\right) - \ln(2)$$

(1d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 4^k} \cdot \zeta(2 \cdot k) = \frac{1}{1 \cdot 4} \cdot \zeta(2) + \frac{1}{2 \cdot 16}\zeta(4) + \frac{1}{3 \cdot 64}\zeta(6) + \ldots = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(1e) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) \cdot 4^k} \cdot \zeta(2k+1) = \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot \zeta(3) + \frac{1}{5 \cdot 16}\zeta(5) + \frac{1}{7 \cdot 64}\zeta(7) + \ldots = \ln(2) - \gamma$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \zeta(2 \cdot k) \cdot z^{2 \cdot k} = \zeta(2) \cdot z^2 + \frac{1}{2}\zeta(4) \cdot z^4 + \frac{1}{3}\zeta(6) \cdot z^6 + \ldots = \ln \frac{\pi \cdot z}{\sin(\pi \cdot z)}$$

$|z^2| \le 1$, $z^2 \ne 1$

2a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 6^{2 \cdot k}} \cdot \zeta(2 \cdot k) = \frac{1}{1 \cdot 6^2}\zeta(2) + \frac{1}{2 \cdot 6^4}\zeta(4) + \frac{1}{3 \cdot 6^6}\zeta(6) + \ldots = \ln\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \zeta(2\cdot k) \cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2 - \frac{1}{2}\zeta(4)\cdot z^4 + \frac{1}{3}\zeta(6)\cdot z^6 - + \ldots = -ln \frac{sinh(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$$

(4) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(k)-1) \cdot z^k = \frac{\zeta(2)-1}{2} \cdot z^2 + \frac{\zeta(3)-1}{3} \cdot z^3 + \ldots = (1-\gamma)\cdot z + ln\,\Gamma(2-z)$$

$|z| \le 1$

(4a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{2} + \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(4)-1}{4} + \ldots = 1-\gamma$$

(4b) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot (\zeta(k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{2} - \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(4)-1}{4} - + \ldots = ln(2) - 1 + \gamma$$

(4c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\zeta(2\cdot k)-1) = \frac{\zeta(2)-1}{1} + \frac{\zeta(4)-1}{2} + \frac{\zeta(6)-1}{3} + \ldots = ln(2)$$

(4d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot (\zeta(2k+1)-1) = \frac{\zeta(3)-1}{3} + \frac{\zeta(5)-1}{5} + \frac{\zeta(7)-1}{7} + \ldots = 1-\gamma - ln\sqrt{2}$$

(4e) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\zeta(2\cdot k) - \frac{4k+1}{4k+2}\right) = \frac{\zeta(2)-5/6}{1} + \frac{\zeta(4)-9/10}{2} + \frac{\zeta(6)-13/14}{3} + \ldots = 1$$

3.2. Ausgangsreihe $\boxed{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k = z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{z}{1-z}}$ $|z| \le 1$, $z \ne \pm 1$

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2\cdot k) \cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2 + \zeta(4)\cdot z^4 + \zeta(6)\cdot z^6 + \ldots = \frac{1}{2} \cdot [1 - \pi \cdot z \cdot cot(\pi \cdot z)]$$

$|z| \le 1$, $z \ne \pm 1$

(5a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2\cdot k) \cdot z^{2\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2}$$

(5b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \zeta(2\cdot k) = \frac{1}{4} \cdot \zeta(2) + \frac{1}{16} \cdot \zeta(4) + \frac{1}{64} \cdot \zeta(6) + \ldots = \frac{1}{2}$$

(5c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2\cdot k}} \zeta(2\cdot k) = \frac{1}{4^2} \cdot \zeta(2) + \frac{1}{16^2} \cdot \zeta(4) + \frac{1}{64^2} \cdot \zeta(6) + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

(5d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k-1}{4^{2k}}\zeta(2\cdot k) = \frac{3}{4^2}\cdot\zeta(2)+\frac{15}{16^2}\cdot\zeta(4)+\frac{63}{64^2}\cdot\zeta(6)+\ldots=\frac{\pi}{8}$$

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot z^2-\zeta(4)\cdot z^4+-\ldots=\frac{1}{2}\cdot[\pi\cdot z\cdot coth(\pi\cdot z)-1]$$

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(4k-2)\cdot z^{4\cdot k-2} = \zeta(2)\cdot z^2+\zeta(6)\cdot z^6+\ldots=\frac{\pi}{4}\cdot z\cdot[coth(\pi z)-cot(\pi z)]$$

(7a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2k-1}}\zeta(4k-2) = \frac{1}{4^1}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{4^3}\cdot\zeta(6)+\frac{1}{4^5}\cdot\zeta(10)+\ldots=\frac{\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(8) $$\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k)\cdot z^k = \zeta(2)\cdot z^2+\zeta(3)\cdot z^3+\zeta(4)\cdot z^4+\ldots=-z\cdot\psi(1-z)-\gamma\cdot z$$

$$|z|\le 1\ ,\ z\ne\pm1$$

(9) $$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k\zeta(k)\cdot z^k = \zeta(2)\cdot z^2-\zeta(3)\cdot z^3+\zeta(4)\cdot z^4-+\ldots=\gamma\cdot z+z\cdot\psi(1+z)$$

(9*) $$\psi(z)=-\frac{1}{z}-\gamma+\zeta(2)\cdot z^1-\zeta(3)\cdot z^2+-\ldots=-\frac{1}{z}-\gamma+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\zeta(k)\cdot z^{k-1}$$

(10) $$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k+1)\cdot z^{2k+1} = \zeta(3)\cdot z^3+\zeta(5)\cdot z^5+\ldots=-\frac{\psi(1-z)+\psi(1+z)}{2}\cdot z-\gamma\cdot z$$

(8a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}\zeta(k) = \frac{1}{4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{16}\cdot\zeta(4)+\ldots=ln(2)$$

(9a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}\zeta(k) = \frac{1}{4}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{16}\cdot\zeta(4)-+\ldots=1-ln(2)$$

(8b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}}\zeta(2\cdot k) = \zeta(2)+\frac{1}{4}\cdot\zeta(4)+\frac{1}{4^2}\cdot\zeta(6)+\ldots=2$$

(10a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}\zeta(2\cdot k+1) = \frac{1}{4}\cdot\zeta(3)+\frac{1}{4^2}\cdot\zeta(5)+\frac{1}{4^3}\cdot\zeta(7)+\ldots=2\cdot ln(2)-1$$

(8c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-1}{4^k}\zeta(k+1) = \frac{3-1}{4}\cdot\zeta(2)+\frac{9-1}{16}\cdot\zeta(3)+\frac{27-1}{64}\cdot\zeta(4)+\ldots=\pi$$

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2\cdot k)-1)\cdot z^{2\cdot k}=\frac{1-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\cdot z)}{2}-\frac{z^2}{1-z^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2}$$

(12) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(4k-2)-1)\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{\pi\cdot z\cdot[coth(\pi z)-cot(\pi z)]}{4}-\frac{z^2}{1-z^4}$$

(11a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\cdot(\zeta(2\cdot k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{4^1}+\frac{\zeta(4)-1}{4^2}+\frac{\zeta(6)-1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{6}$$

(12a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2k-1}}\cdot(\zeta(4k-2)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{4^1}+\frac{\zeta(6)-1}{4^3}+\frac{\zeta(10)-1}{4^5}+\ldots=\frac{\pi}{8}\cdot coth\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{15}$$

(13) $$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)\cdot z^k=(\zeta(2)-1)\cdot z^2+(\zeta(3)-1)\cdot z^3+\ldots=-z\cdot\psi(1-z)-\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1-z}$$

(14) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\zeta(k)-1)\cdot z^k=(\zeta(2)-1)\cdot z^2-(\zeta(3)-1)\cdot z^3+-\ldots=z\cdot\psi(1+z)+\gamma\cdot z-\frac{z^2}{1+z}$$

(13a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot(\zeta(k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{2}+\frac{\zeta(3)-1}{4}+\frac{\zeta(4)-1}{8}+\ldots=ln(2)-\frac{1}{2}$$

(14a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot(\zeta(k)-1)=\frac{\zeta(2)-1}{2}-\frac{\zeta(3)-1}{4}+\frac{\zeta(4)-1}{8}-+\ldots=\frac{5}{6}-ln(2)$$

(11) bis **(14)** konvergieren auch für z = 1; durch den Grenzübergang $z\to 1$ folgt

(11b) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2\cdot k)-1)=(\zeta(2)-1)+(\zeta(4)-1)+(\zeta(6)-1)+\ldots=\frac{3}{4}$$

(12b) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(4k-2)-1)=(\zeta(2)-1)+(\zeta(6)-1)+(\zeta(10)-1)+\ldots=\frac{\pi}{4}\cdot coth(\pi)-\frac{1}{8}$$

(13b) $$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)=(\zeta(2)-1)+(\zeta(3)-1)+(\zeta(4)-1)+\ldots=1$$ (Leibniz)

(13c) $$\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2k+1)-1)=(\zeta(3)-1)+(\zeta(5)-1)+(\zeta(7)-1)+\ldots=\frac{1}{4}$$

(14b) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(\zeta(k)-1)=(\zeta(2)-1)-(\zeta(3)-1)+(\zeta(4)-1)-+\ldots=\frac{1}{2}$$

(14c) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{k-1}{k}\cdot(\zeta(k)-1)=\frac{1}{2}\cdot(\zeta(2)-1)-\frac{2}{3}\cdot(\zeta(3)-1)+-\ \ldots=\frac{3}{2}-\ln(2)-\gamma$$

3.3. Ausgangsreihen $$\boxed{f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{k-1}}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=z\pm\frac{1}{3}\cdot z^3+\frac{1}{5}\cdot z^5\pm\frac{1}{7}\cdot z^7+\ldots=\begin{cases}artanh(z)\\ arctan(z)\end{cases}}$$

(15) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{\zeta(2)}{1}\cdot z^2+\frac{\zeta(6)}{3}\cdot z^6+\frac{\zeta(10)}{5}\cdot z^{10}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot ln\frac{sinh(\pi\cdot z)}{sin(\pi\cdot z)}}$$

$$\underline{=ar\,tanh\frac{sinh(\pi\cdot z)-sin(\pi\cdot z)}{sinh(\pi\cdot z)+sin(\pi\cdot z)}}\qquad |z|\le 1\ ,\ z^2\ne 1$$

(15a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 4^{2k-1}}=\frac{1}{1\cdot 4}\cdot\zeta(2)+\frac{1}{3\cdot 4^3}\cdot\zeta(6)+\frac{1}{5\cdot 4^5}\cdot\zeta(10)+\ldots=\frac{1}{2}\cdot ln\,sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(15b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(4k-2)-1}{(2k-1)\cdot 4^{2k-1}}=\frac{1}{1\cdot 4}\cdot(\zeta(2)-1)+\frac{1}{3\cdot 4^3}\cdot(\zeta(6)-1)+\ldots=\frac{1}{2}\cdot ln\left[\frac{3}{5}\cdot sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

16) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{\zeta(4k-2)}{2k-1}\cdot z^{4\cdot k-2}=\frac{\zeta(2)}{1}\cdot z^2-\frac{\zeta(6)}{3}\cdot z^6+\frac{\zeta(10)}{5}\cdot z^{10}-+\ldots=}$$

$$\underline{=arctan\frac{sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)\cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)-cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)\cdot sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)}{sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)\cdot cosh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)+cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)\cdot sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot z\right)}}\qquad |z|\le 1\ ,\ z^2\ne -i$$

(16a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 8^{2k-1}}=\frac{1}{1\cdot 8}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{3\cdot 8^3}\cdot\zeta(6)+\frac{1}{5\cdot 8^5}\cdot\zeta(10)-+\ldots=arctan\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

(16b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot\zeta(4k-2)}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}=\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\zeta(2)-\frac{1}{3\cdot 2^3}\cdot\zeta(6)+\frac{1}{5\cdot 2^5}\cdot\zeta(10)-+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

(17) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot z^3+\frac{\zeta(5)}{5}\cdot z^5+\frac{\zeta(7)}{7}\cdot z^7+\ \ldots=-\gamma\cdot z+\frac{1}{2}\cdot ln\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1+z)}$$

$$|z|\le 1\ ,\ z\ne 1$$

(18) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1}=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot z^3-\frac{\zeta(5)}{5}\cdot z^5\ +-=\gamma\cdot z-\frac{1}{2\cdot i}\cdot ln\frac{\Gamma(1-i\,z)}{\Gamma(1+i\,z)}.$$

$$|z|\le 1\ ,\ z\ne -i$$

(18*) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot x^{2\cdot k-1}=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot x^3-\frac{\zeta(5)}{5}\cdot x^5\ +-=\gamma\cdot x+arg\,\Gamma(1+i\,x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-arctan\frac{x}{n}\right]\quad -1\le x\le 1$$

(18a) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(2k-1)}{2k-1}\cdot=\frac{\zeta(3)}{3}-\frac{\zeta(5)}{5}+\frac{\zeta(7)}{7}-\frac{\zeta(9)}{9}+-\ldots=\gamma+arg\,\Gamma(1+i)=\eta_1$$

$$\eta_1:=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-arctan\frac{1}{n}\right]=0.275575\ldots$$

(18b) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\cdot\zeta(2k-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\zeta(3)-\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{16}\cdot\zeta(5)+\frac{1}{7}\cdot\frac{63}{64}\cdot\zeta(7)-\ldots=$$

$$=arg\frac{\Gamma^2\left(1-\frac{i}{2}\right)}{\Gamma(1-i)}=\sum_{n=1}^{\infty}arctan\frac{1}{n\cdot\left(4\cdot n^2+3\right)}\approx 0{,}186476\ldots$$

(19) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right]\cdot z^{2\cdot k-1}=\frac{1}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot z^3-\frac{1}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot z^5+\frac{1}{7}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)\cdot z^7-+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}-arctan\frac{z}{\sqrt{n}}\right)\quad |z|\le 1\ ,\ z\ne -i$$

(19a) $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right]=\frac{1}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{7}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)-+\ldots=\eta_2$$

$$\eta_2:=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=0.697428\ldots$$

(19b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\cdot\zeta\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{5}\cdot\frac{15}{16}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{7}\cdot\frac{63}{64}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right) - \ldots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(4\cdot n+3)} \approx 0{,}494\ldots$$

3.4.* Eine geometrische Deutung des Grenzwertes η_2

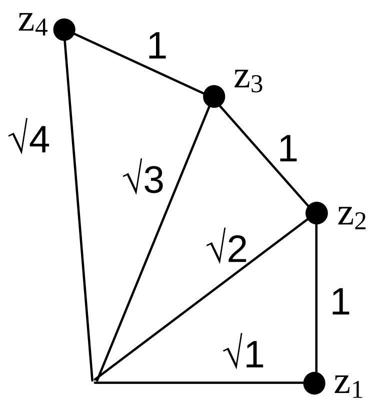
Siehe Pólya/Szegö *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Band* 1, III. *Abschnitt*, *Aufgabe* 42.

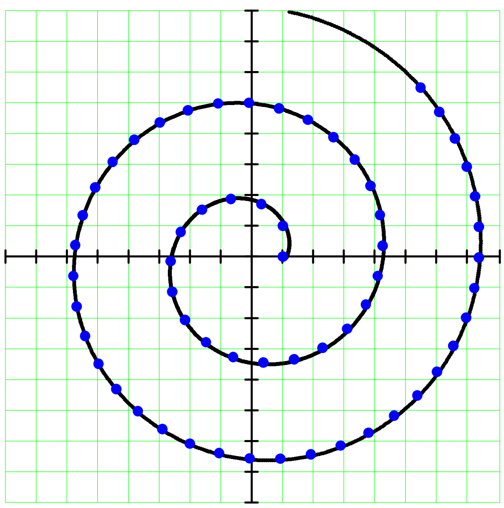
Die Punktfolge $z_1 = 1,\ z_m = \prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)\ (m>1)$ bildet einen Streckenzug in der komplexen Ebene, der sich in seinem Verlauf einer verallgemeinerten Archimedischen Spirale annähert.

Die Spirale $\underline{r(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot(\varphi + r_0)}$ mit $\underline{r_0 = \eta_2 - \zeta\left(\frac{1}{2}\right)}$ approximiert den Streckenzug z_m.

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}\cdot\zeta\left[\frac{2k-1}{2}\right] = \lim_{m\to\infty}\left(2\cdot\sqrt{m} - \sum_{n=1}^{m}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2{,}15778\ldots$$

Der Streckenzug läßt sich iterativ konstruieren:
Man trägt jeweils im Punkt z_{m-1} senkrecht auf r_{m-1} die Strecke 1 ab und erhält z_m .





Für den m-ten Punkt gilt:

$$r_m = \sqrt{m}\,,\quad \varphi_m = \sum_{n=1}^{m-1}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\qquad r(\varphi_m) - r_m = \frac{1}{2}\cdot(\varphi_m + r_0) - \sqrt{m} \to 0 \quad \text{für} \quad m\to\infty\ .$$

Der Windungsabstand beträgt $r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi) = \pi$.

3.5. Ausgangsreihe $\boxed{f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot z^k=(1+z)^{\alpha}}$ $\alpha\neq 0$, reell

Diese Reihe ist für positives ganzzahliges $\alpha=m$ und beliebigem z eine endliche Summe.
Für $\alpha\neq m$ ist die Reihe absolut konvergent für $|z|<1$ und falls $\alpha>0$ auch für $|z|=1$.
Man beachte, dass stets der Hauptwert der Potenz $f(z)=e^{\alpha\cdot ln(1+z)}$ *gemeint ist.*

(20) $\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)\cdot\left[(1-z)^k-(-z)^k\right]=-(1-z)^{\alpha}}$ $0<\alpha<1$, $|z|\leq 1,\ |1-z|\leq 1$

(20a) $1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)=1+\binom{\alpha}{1}\cdot\zeta(1-\alpha)+\binom{\alpha}{2}\cdot\zeta(2-\alpha)+\binom{\alpha}{3}\cdot\zeta(3-\alpha)+\ldots=0$

(20b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)=\binom{\alpha}{1}\cdot\zeta(1-\alpha)-\binom{\alpha}{2}\cdot\zeta(2-\alpha)+\binom{\alpha}{3}\cdot\zeta(3-\alpha)-+\ldots=0$

(20c) $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^{2k-1}}=\binom{\alpha}{1}\cdot\frac{\zeta(1-\alpha)}{2^1}+\binom{\alpha}{3}\cdot\frac{\zeta(3-\alpha)}{2^3}+\ldots=-\frac{1}{2^{\alpha+1}}$

(20d) $1+\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)+-\ldots=0$

(20e) $\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)+\ldots=0$

(20g) $\frac{1}{1!\cdot 4^1}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 4^3}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\cdot 4^5}\cdot\zeta\left(\frac{9}{2}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{7!\cdot 4^7}\cdot\zeta\left(\frac{13}{2}\right)+\ldots=\frac{-1}{\sqrt{8}}$

(21) $\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1]\cdot\left[(1-z)^k-(-z)^k\right]=-(2-z)^{\alpha}}$ $0<\alpha<1$, $|z|\leq 1,\ |1-z|\leq 1$

(21a) $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1]=1+\binom{\alpha}{1}\cdot[\zeta(1-\alpha)-1]+\binom{\alpha}{2}\cdot[\zeta(2-\alpha)-1]+\ldots=-2^{\alpha}$

(21b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{\alpha}{k}\cdot[\zeta(k-\alpha)-1]=\binom{\alpha}{1}\cdot[\zeta(1-\alpha)-1]-\binom{\alpha}{2}\cdot[\zeta(2-\alpha)-1]+-\ldots=1$

(21c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{[\zeta(2k-1-\alpha)-1]}{2^{2k-1}}=\binom{\alpha}{1}\cdot\frac{[\zeta(1-\alpha)-1]}{2^{1}}+\binom{\alpha}{3}\cdot\frac{[\zeta(3-\alpha)-1]}{2^{3}}+\ldots=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}$$

(21d) $$\frac{1}{1!\cdot 4^{1}}\cdot\left[\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-1\right]+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 4^{3}}\cdot\left[\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-1\right]+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\cdot 4^{5}}\cdot\left[\zeta\left(\frac{9}{2}\right)-1\right]+\ldots=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Für $|y|\le\sqrt{3}$, $r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^{2}}$, $\varphi=arctan(y)$ erfüllen $z=\frac{1}{2}(1-y\cdot i)=r\cdot e^{-\varphi\cdot i}$ und $1-z=\bar{z}=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ die Bedingungen $|z|\le 1$, $|1-z|\le 1$.

(20#)

$$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot\zeta(k-\alpha)\cdot r^{k}\cdot\left[e^{\varphi\cdot k\cdot i}-(-1)^{k}e^{-\varphi\cdot k\cdot i}\right]=-r^{\alpha}\cdot e^{\varphi\cdot\alpha\cdot i}=-r^{\alpha}\cdot[cos(\varphi\cdot\alpha)+i\cdot sin(\varphi\cdot\alpha)]}$$

(22) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\zeta(2k-\alpha)\cdot r^{2k}\cdot sin(2k\cdot\varphi)=-\frac{1}{2}\cdot r^{\alpha}\cdot sin(\alpha\cdot\varphi)}$$

(23) $$\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)\cdot r^{2k-1}\cdot cos((2k-1)\cdot\varphi)=-\frac{1}{2}\cdot r^{\alpha}\cdot cos(\alpha\cdot\varphi)}$$

Jeweils für $0<\alpha<1$, $|y|\le\sqrt{3}$ mit $r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^{2}}$ und $\varphi=arctan(y)$.

(22a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k-\alpha)}{2^{k}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{\alpha}}}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(23a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1-\alpha)}{2^{k}}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{2^{1+\alpha}}}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(22b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k}\cdot\zeta(2k-\alpha)\cdot sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

(23b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1-\alpha)\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

(22c) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{1/2}{4k-2}\cdot\frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\zeta\left(\frac{8k-5}{2}\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\binom{1/2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\binom{1/2}{6}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\zeta\left(\frac{11}{2}\right)+\binom{1/2}{10}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\zeta\left(\frac{19}{2}\right)-+\ldots=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

(23c) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k-1}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot\zeta\left(\frac{4k-3}{2}\right)\cdot\cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\binom{1/2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-\binom{1/2}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)-\binom{1/2}{5}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\zeta\left(\frac{9}{2}\right)+--\ldots=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$$

(22d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k}\cdot\zeta\left(\frac{4k-1}{2}\right)\cdot\sin\left(2k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$\left[\binom{1/2}{2}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)-\binom{1/2}{4}\cdot\zeta\left(\frac{7}{2}\right)\right]+\left[\binom{1/2}{8}\cdot\zeta\left(\frac{15}{2}\right)-\binom{1/2}{10}\cdot\zeta\left(\frac{19}{2}\right)\right]+\ldots=-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}$$

(23d) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{2k-1}\cdot\zeta\left(\frac{4k-3}{2}\right)\cdot\cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}$$

$$\left[\binom{1/2}{1}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)-2\binom{1/2}{3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)+\binom{1/2}{5}\zeta\left(\frac{9}{2}\right)\right]+\left[\binom{1/2}{7}\zeta\left(\frac{13}{2}\right)-2\binom{1/2}{9}\zeta\left(\frac{17}{2}\right)+..\right]+\ldots=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\ .$$

(24) $$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k}\zeta(k+\beta)\cdot z^k=\zeta(\beta)-\beta\cdot\zeta(1+\beta)\cdot z+\binom{-\beta}{2}\zeta(2+\beta)\cdot z^2+\ldots=\zeta(\beta,z)-\frac{1}{z^\beta}$$

$$|z|<1,\ z\neq 0,\ 0<\beta,\ \beta\neq 1$$

,

bzw. mit $\binom{-\beta}{k}=(-1)^k\cdot\binom{k-1+\beta}{k}$ und $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+z)^\beta}-\frac{1}{n^\beta}\right]=\zeta(\beta,z)-\frac{1}{z^\beta}-\zeta(\beta)$

(24*) $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{k-1+\beta}{k}\zeta(k+\beta)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+z)^\beta}-\frac{1}{n^\beta}\right]=\zeta(\beta,z)-\zeta(\beta)-\frac{1}{z^\beta}$$

$$|z|<1,\ z\neq 0,\ \beta>0,\ \beta\neq 1$$

(25) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k}{n}\zeta(n+k+1)\cdot z^k=\zeta(n+1,z)-\frac{1}{z^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\psi^{(n)}(z)-\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$|z|<1,\ z\neq 0$$

Das ist die n-te Ableitung von **(9*)**.

(26) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m-1+k}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+k)}{2^k}=\zeta(m)-\binom{m}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+1)}{2^1}+\binom{m+1}{m-1}\cdot\frac{\zeta(m+2)}{2^2}-+\ldots=$$

$$=\zeta\left(m,\frac{1}{2}\right)-2^m=\left(2^m-1\right)\cdot\zeta(m)-2^m\ ,\quad m\geq 2.$$

(26a) $$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot k\cdot\frac{\zeta(k+1)}{2^{k-1}}=2\cdot\frac{\zeta(3)}{2^1}-3\cdot\frac{\zeta(4)}{2^2}+4\cdot\frac{\zeta(5)}{2^3}-5\cdot\frac{\zeta(6)}{2^4}+-\ldots=4-\frac{\pi^2}{3}$$

(26b) $$\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{k}{3}\cdot\frac{\zeta(k+1)}{2^{k-2}}=\binom{4}{3}\cdot\frac{\zeta(5)}{2^2}-\binom{5}{3}\cdot\frac{\zeta(6)}{2^3}+\binom{6}{3}\cdot\frac{\zeta(7)}{2^4}-+\ldots=8-\frac{7\cdot\pi^4}{90}$$

(27) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot\left[z^k-(z-1)^k\right]=\frac{1}{(1-z)^\beta}\ ,\quad |z|<1, |z-1|<1,\quad \beta>0$$

(27a) $$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k+\beta}{2k+1}\cdot\frac{\zeta(2k+1+\beta)}{4^k}=\beta\cdot\zeta(1+\beta)+\binom{2+\beta}{3}\cdot\frac{\zeta(3+\beta)}{4^1}+\binom{4+\beta}{5}\cdot\frac{\zeta(5+\beta)}{4^2}+\ldots=2^\beta$$

(27#) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k-1+\beta}{k}\cdot\zeta(k+\beta)\cdot r^k\cdot\left[e^{\varphi\cdot k\cdot i}-(-1)^k e^{-\varphi\cdot k\cdot i}\right]=r^{-\beta}\cdot[cos(\varphi\cdot\beta)+i\cdot sin(\varphi\cdot\beta)]$$

(28) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\zeta(2k+\beta)\cdot r^{2k}\cdot sin(2k\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot sin(\beta\cdot\varphi)$$

(29) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\zeta(2k-1+\beta)\cdot r^{2k-1}\cdot cos((2k-1)\cdot\varphi)=\frac{1}{2}\cdot r^{-\beta}\cdot cos(\beta\cdot\varphi)$$

Jeweils für $0<\beta$, $|y|<\sqrt{3}$ mit $r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+y^2}$ und $\varphi=arctan(y)$.

(28a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{2^{k-1}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2^{\beta}}\cdot sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(29a) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{2^{k-1}}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2^{\beta-1}}\cdot cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

(28b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-1+\beta}{2k}\cdot\frac{\zeta(2k+\beta)}{3^{k}}\cdot sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta}}\cdot sin\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

(29b) $$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k-2+\beta}{2k-1}\cdot\frac{\zeta(2k-1+\beta)}{3^{k}}\cdot cos\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\beta-1}}\cdot cos\left(\beta\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$

(28c) $$\frac{\zeta(3)}{4^0}-\frac{\zeta(7)}{4^1}+\frac{\zeta(11)}{4^2}-\frac{\zeta(15)}{4^3}+\frac{\zeta(19)}{4^4}-\frac{\zeta(23)}{4^5}+...=1$$

(28d) $$3\cdot\frac{\zeta(4)}{2^1}-7\cdot\frac{\zeta(8)}{2^3}+11\frac{\zeta(12)}{2^5}-15\cdot\frac{\zeta(16)}{2^7}+19\cdot\frac{\zeta(20)}{2^9}-+...=1$$

(29c) $$\frac{\zeta(2)}{2^0}-\frac{\zeta(4)}{2^1}-\frac{\zeta(6)}{2^2}+\frac{\zeta(8)}{2^3}+\frac{\zeta(10)}{2^4}-\frac{\zeta(12)}{2^5}-\frac{\zeta(14)}{2^6}++--...=1$$

(29d) $$2\cdot\frac{\zeta(3)}{2^0}-4\cdot\frac{\zeta(5)}{2^1}-6\cdot\frac{\zeta(7)}{2^2}+8\cdot\frac{\zeta(9)}{2^3}+10\cdot\frac{\zeta(11)}{2^4}--++...=0$$

3.6. Ausgangsreihe $\boxed{f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot z^k=exp(z)}$, $z\in C$

Darstellungen der Reihen mittels anderer Summen.

(E1) $$es_1(z):=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\zeta(k)\cdot z^k=\frac{1}{2!}\cdot\zeta(2)\cdot z^2+\frac{1}{3!}\cdot\zeta(3)\cdot z^3+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left[exp\left(\frac{z}{n}\right)-1-\frac{z}{n}\right]$$

(E2) $$es_2(z):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\zeta(\lambda\cdot k+1)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)-\frac{1}{n}\right]\qquad\lambda>0$$

(E3) $$es_3(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot z^k=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\mu}}exp\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right]\quad\lambda>0,\ \mu>1$$

Durch beidseitige Integration der Gleichungen (E1), (E2), (E3) mittels $\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}} \cdot es_i(z)\,dz$ folgt

für $0<x<1$, $\lambda>0$, $\mu>1$

(32) $\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k)\cdot x^k = \zeta(2)\cdot x^2 + \zeta(3)\cdot x^3 + \zeta(4)\cdot x^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{x^2}{(n-x)}$

(33) $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(\lambda\cdot k+1)\cdot x^{k+1} = \zeta(\lambda+1)\cdot x^2 + \zeta(2\lambda+1)\cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{x^2}{n^{\lambda}-x}$

(34) $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\lambda\cdot k+\mu)\cdot x^{k+1} = \zeta(\mu)\cdot x + \zeta(\lambda+\mu)\cdot x^2 + \zeta(2\lambda+\mu)\cdot x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu-\lambda}}\frac{x}{n^{\lambda}-x}$

3.7. Ausgangsreihen $\boxed{sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot z^{2k+1}, \quad cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot z^{2k}}$ $\quad z \in C$

Darstellungen der Reihen mittels anderer Summen.

(C1) $cs_1(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k)!}\cdot\zeta(2\cdot k)\cdot z^{2\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[cos\left(\frac{z}{n}\right)-1\right]$

(C2) $cs_2(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k)!}\cdot\zeta(\lambda\cdot 2\cdot k+1)\cdot z^{2\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)-\frac{1}{n}\right], \lambda>0$

(C3) $cs_3(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k)!}\cdot\zeta(\lambda\cdot 2\cdot k+\mu)\cdot z^{2\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\mu}} cos\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right] \quad \lambda>0,\ \mu>1$

(S1) $ss_1(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)!}\cdot\zeta(2\cdot k+1)\cdot z^{2\cdot k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[sin\left(\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]$

(S3) $ss_3(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\cdot k+1)!}\cdot\zeta(\lambda\cdot(2\cdot k+1)+\mu)\cdot z^{2\cdot k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^{\mu}}\cdot sin\left(\frac{z}{n^{\lambda}}\right)\right], \lambda>0,\ \mu\geq 1$

Durch beidseitige Integrationen mittels $\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}}\cdot cs_i(z)\,dz$ bzw. $\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x}}\cdot ss_i(z)\,dz$ folgen

für $0<x<1$, $\lambda>0$, $\mu>1$ die Beziehungen

(35) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(2\cdot k)\cdot x^{2\cdot k} = \zeta(2)\cdot x^2 - \zeta(4)\cdot x^4 + \zeta(6)\cdot x^6 - + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2+x^2}$

(36) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(\lambda\cdot 2k+1)\cdot x^{2\cdot k} = \zeta(2\lambda+1)\cdot x^2 - \zeta(4\lambda+1)\cdot x^4 + - ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{x^2}{n^{2\lambda}+x^2}$

(37) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\zeta(\lambda\cdot 2k+\mu)\cdot x^{2\cdot k+1} = \zeta(\mu)\cdot x - \zeta(2\lambda+\mu)\cdot x^3 + - ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu-2\lambda}}\frac{x}{n^{2\lambda}+x^2}$

(38) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\zeta(2k+1)\cdot x^{2\cdot k+1} = \zeta(3)\cdot x^3 - \zeta(5)\cdot x^5 + - ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{x^3}{n^2+x^2}$

(39) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\zeta(\lambda\cdot(2k+1)+\mu)\cdot x^{2\cdot k+1} = \zeta(\lambda+\mu)\cdot x - \zeta(3\lambda+\mu)\cdot x^3 + - ... =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu-\lambda}}\frac{x}{n^{2\lambda}+x^2} \quad ,\ (\mu \ge 1)$$

3.8. Endliche Summen mit Zetawerten

$z \in C - \{0\}$, jedoch gültig für $z \to 0$

(40) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot m}}\cdot\frac{z^m}{n^{\lambda}-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}-z} - \sum_{k=0}^{m-1}\zeta(\lambda\cdot(k+1))\cdot z^k \qquad z \ne n^{\lambda},\ \lambda > 1,\ m = 1,2,...$

Für $m = 1$ vereinfacht sich **(40)** zu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}} = \zeta(\lambda)$.

(40a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\cdot m}}\cdot\frac{z^m}{n^2-z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{\pi}{\sqrt{z}}\cdot cot(\pi\cdot\sqrt{z})\right] - \sum_{k=0}^{m-1}\zeta(2\cdot(k+1))\cdot z^k$

$z \ne n^{\lambda},\ \lambda = 2,\ m = 1,2,...$

(40b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m}}\cdot\frac{z^m}{n-z} = -\psi(1-z) - \gamma - \sum_{k=1}^{m-1}\zeta(k+1)\cdot z^k \qquad z \ne n,\quad m = 2,3,...$

(40c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\cdot m}}\cdot\frac{z^{2\cdot m}}{n^2-z^2} = \frac{1}{2\cdot z^2}[1 - \pi z\cdot cot(\pi z)] - \sum_{k=0}^{m-1}\zeta(2(k+1))\cdot z^{2\cdot k} \quad z \ne \pm n,\ m = 1,2,...$

(40d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n^{2\cdot m}}\cdot\frac{z^{2\cdot m}}{n^2+z^2} = \frac{1}{2\cdot z^2}[\pi z\cdot coth(\pi z) - 1] - \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\cdot\zeta(2(k+1))\cdot z^{2\cdot k}$

$z \ne \pm i\cdot n,\quad m = 1,2,...$

Mit ausgewählten Werten für λ, m, z und $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ entstehen die speziellen Summenformeln:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot(4n^2-1)}=2-\zeta(2)=2-\frac{\pi^2}{6}\quad,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2\cdot(16n^2-1)}=2-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot n^2\cdot(2n-1)}=ln(2)-\frac{\pi^2}{24}\qquad,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot n^3\cdot(2n-1)}=ln(2)-\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\cdot n^3\cdot(2n+1)}=1-ln(2)-\frac{\pi^2}{24}+\frac{1}{8}\cdot\zeta(3)\quad,\quad \underline{\zeta(3)=8\cdot ln(2)-4-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\cdot(4n^2-1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2-z^2}=\frac{1}{2\cdot z^4}\cdot\left[-\frac{\pi^2}{3}\cdot z^2-\pi\cdot z\cdot cot(\pi\ z)+1\right]\ ,\quad z\neq\pm n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{n^2-z^2}=\frac{1}{2\cdot z^6}\cdot\left[-\frac{\pi^4}{45}\cdot z^4-\frac{\pi^2}{3}\cdot z^2-\pi\cdot z\cdot cot(\pi z)+1\right]\ ,\quad z\neq\pm n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2+z^2}=\frac{1}{2\cdot z^4}\left[\frac{\pi^2}{3}\cdot z^2-\pi\cdot z\cdot coth(\pi\ z)+1\right]\ ,\quad z\neq\pm i\cdot n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{n^2+z^2}=\frac{1}{2\cdot z^6}\left[\frac{\pi^4}{45}\cdot z^4-\frac{\pi^2}{3}\cdot z^2+\pi\cdot z\cdot coth(\pi z)-1\right]\ ,\quad z\neq\pm i\cdot n$$

Mit $k=0,\pm1,\pm2,...$ gilt schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(2k+1)^2}{(2n)^2-(2k+1)^2}=\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(2k+1)^2}{(2n)^2-(2k+1)^2}=\frac{8}{(2k+1)^4}-\frac{2\cdot\pi^2}{3\cdot(2k+1)^2}-\frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(4k+1)^2}{(4n)^2-(4k+1)^2}=\frac{8}{(4k+1)^2}-\frac{2\cdot\pi}{4k+1}-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(4k+1)^2}{(4n)^2-(4k+1)^2}=\frac{128}{(4k+1)^4}-\frac{32\cdot\pi}{(4k+1)^3}-\frac{8\cdot\pi^2}{3\cdot(4k+1)^2}-\frac{\pi^4}{90}.$$

4.* Das Weierstraß-Produkt $P_0(z,\lambda)$

4.1. Bedeutung der Funktion $P_0(z,\lambda)$

Viele der behandelten Reihen lassen sich mit der Funktion $P_0(z,\lambda)$ (bzw. artverwandten Funktionen) darstellen.

$$\underline{P_0(z,\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right)\cdot e^{s\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right)}} \quad , \quad s\left(\frac{z}{n^\lambda},\lambda\right) := \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]}\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{z}{n^\lambda}\right)^k , \quad \lambda > 0 .$$

So gilt z. B. für $k_0 = min\{k \mid \lambda\cdot k > 1\} = [\lambda^{-1}] + 1$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\zeta(\lambda\cdot k)\cdot z^k = -ln\, P_0(z,\lambda) \quad , \quad \sum_{k=k_0}^{\infty}\zeta(\lambda\cdot k)\cdot z^k = -z\cdot\frac{P_0'(z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} = -z\cdot Q_0(z,\lambda) ,$$

und für $k_0 = min\{k \mid \lambda\cdot(2\cdot k+1) > 1\} = \left[\frac{\lambda+1}{2\cdot\lambda}\right] + 1$ folgt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\zeta[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = \frac{1}{2}\cdot ln\frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\zeta[\lambda\cdot(2k-1)]}{2k-1}\cdot z^{2\cdot k-1} = \frac{1}{2\cdot i}\cdot ln\frac{P_0(-i\cdot z,\lambda)}{P_0(i\cdot z,\lambda)} .$$

Es gilt aber auch u. a. $-Q_0(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1}\zeta(\lambda\cdot(k+1))\cdot z^k + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda\cdot m}}\cdot\frac{z^m}{n^\lambda - z}$, $\lambda > 1$.

4.2. Einige Eigenschaften von $P_0(z,\lambda)$

(1) Für $\underline{\lambda > 1}$ gilt

$$P_0(z,\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^\lambda}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k\cdot z^k \quad \text{mit} \quad a_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k<\infty}\frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^\lambda} .$$

Speziell ist $\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k<\infty}\frac{1}{(i_1\cdot i_2\cdot\ldots\cdot i_k)^2} = \frac{\pi^{2\cdot k}}{(2\cdot k+1)!}$.

(2) Für $\underline{\lambda = 1}$ gilt $\displaystyle P_0(z,1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}} = \frac{e^{\gamma\cdot z}}{\Gamma(1-z)}$ (Weierstraß)

(3) Für $\underline{\lambda > 0}$ gilt $P_0(-z, \lambda) \cdot P_0(z, \lambda) = P_0\left(z^2, 2 \cdot \lambda\right)$

(4) $\frac{1}{\Gamma(1+z) \cdot \Gamma(1-z)} = P_0(-z,1) \cdot P_0(z,1) = P_0\left(z^2,2\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{sin(\pi \cdot z)}{\pi \cdot z}$ (Euler)

(5a) $P_0(-i,1) \cdot e^{2i \cdot \eta_1} = P_0(i,1)$ **(5b)** $P_0\left(-i, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{\gamma}{2} - \eta_2 \cdot i}$

(6) $Q_0(z,\lambda) := \frac{P_0'(z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} = \frac{d}{dz} ln\, P_0(z,\lambda)$

(7) Für $\underline{\lambda > 1}$ gilt $Q_0(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - n^{\lambda}}$

(8) Für $\underline{\lambda = 2}$ gilt $Q_0\left(z^2,2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \frac{1}{2 \cdot z} \cdot \left(\pi \cdot cot(\pi \cdot z) - \frac{1}{z}\right)$

(9) Für $\underline{\lambda = 1}$ gilt $Q_0(z,1) = \gamma + \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} = \gamma + \psi(1-z)$

(10) Mit den Reihen (a_k wie in **(1)** definiert, $\lambda > 1$)

$$u_1(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cdot z^{2k-1} \quad , \quad v_1(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cdot z^{2k}$$

$$u_2(z,\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_{2k-1} \cdot z^{2k-1} \quad , \quad v_2(z,\lambda) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{2k} \cdot z^{2k}$$

folgt $ln \frac{P_0(-z,\lambda)}{P_0(z,\lambda)} = 2 \cdot ar\,tanh \frac{u_1(z,\lambda)}{v_1(z,\lambda)}$, $ln \frac{P_0(-i \cdot z,\lambda)}{P_0(i \cdot z,\lambda)} = 2 \cdot i \cdot arctan \frac{u_2(z,\lambda)}{v_2(z,\lambda)}$.

(11) Für $\lambda = 2$ und $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i)$, $\varepsilon^2 = i$ gilt

$$v_1\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot z) + sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z} \quad , \quad u_1\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot z) - sin(\pi \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot z}$$

$$v_2\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) + sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot z}, \quad u_2\left(z^2,2\right) = \frac{sinh(\pi \cdot \varepsilon \cdot z) - sin(\pi \cdot \varepsilon \cdot z)}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \varepsilon \cdot z}.$$