

Gerhard Strey

Spezielle Eikurven

Einblicke in die Kurvenfamilie $r = \lambda \cdot \cos^n(\varphi)$

Verallgemeinerte Kreisfunktionen

Eine Exkursion

Gerhard Strey
Fischerstraße 13
17033 Neubrandenburg
h-g.strey@t-online.de
www.sr-strey.de

 Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Seite	Formel
1. Definition der Eikurven	1	(1)
2. Konstruktionen, Verallgemeinerungen	2	(6)
3. Kurvenlängen, Flächeninhalte, Volumina	4	(7)
<i>3.1. Kurvenumfang der Eikurven</i>	<i>4</i>	<i>(7)</i>
<i>3.2. Flächeninhalte und Flächenschwerpunkt</i>	<i>5</i>	<i>(9)</i>
<i>3.3. Volumen und Oberfläche der Rotationskörper von Eiflächen</i>	<i>8</i>	<i>(20)</i>
4. Elliptische und verwandte Integrale; Ellipse und Eikurve	11	(30)
<i>4.1. Eine Rekursionsformel für elliptische Integrale und Folgerungen</i>	<i>11</i>	<i>(30)</i>
<i>4.2. Ellipsen und Eikurven</i>	<i>13</i>	<i>(38)</i>
<i>4.3. Maßgleiche Ellipsen und Eikurven</i>	<i>15</i>	<i>(47)</i>
5. Eigenschaften der erweiterten Eikurven; zugeordnete Kurven	18	(56)
<i>5.1. Kurvenverlauf der $EK(n)$; singuläre Punkte, Tangenten und Normalen</i>	<i>18</i>	<i>(56)</i>
<i>5.2. Fußpunktkurven der Eikurven</i>	<i>21</i>	<i>(62)</i>
<i>5.3. Flächeninhalte spezieller Fußpunktkurven</i>	<i>25</i>	<i>(68)</i>
<i>5.4. Krümmungsverhalten der $EK(n)$; die Evolute der Eikurve</i>	<i>30</i>	<i>(75)</i>
<i>5.5. Die $EK(n)$ als Billardbande</i>	<i>32</i>	<i>(78)</i>
<i>5.6. Die $EK(n)$ als Einhüllende einer Kreisschar; Verallgemeinerungen</i>	<i>38</i>	<i>(81)</i>
6. Die $EK(n)$ in ausgewählten Lagen und Koordinatendarstellungen	42	(84)
<i>6.1. Verschiebung des Koordinatenursprungs auf der x-Achse</i>	<i>42</i>	<i>(84)</i>
<i>6.2. Spiegelung an der Geraden $x = \lambda/2$</i>	<i>42</i>	<i>(85)</i>
<i>6.3. Drehung um den Ursprung</i>	<i>42</i>	<i>(86)</i>
<i>6.4. Die $EK(3)$ in Symmetrielage zur Winkelhalbierenden $y = x$</i>	<i>44</i>	<i>(87)</i>
<i>6.5. Weitere Parameterdarstellungen</i>	<i>45</i>	<i>(88)</i>
<i>6.6. „Addition“ von Punkten auf der Ovoide $EK(3)$</i>	<i>46</i>	<i>(90)</i>
7. Ein- und umbeschriebene Figuren	47	(91)
<i>7.1. Basisdreiecke</i>	<i>47</i>	<i>(91)</i>
<i>7.2. Einbeschriebene gleichseitige Dreiecke</i>	<i>53</i>	<i>(96)</i>
<i>7.3. Einbeschriebene Rechtecke (numerische Lösungen)</i>	<i>57</i>	<i>(100)</i>
<i>7.4. Einbeschriebene Rechtecke (Approximation für große n)</i>	<i>59</i>	<i>(101)</i>

7.5. Einbeschriebene Rechtecke (spezielle geschlossene Lösungen)	61	(104)
7.6. Umbeschriebene Rechtecke	63	(106)
7.7. Einbeschriebene Kegel	67	(109)
7.8. Einbeschriebene Kegelstümpfe	69	(---)
8. Der Zusammenhang von Sehne und Bogenlänge auf der $EK(n)$	71	(111)
8.1. Grundlegende Vereinbarungen und Definition der Eikurvenfunktionen	71	(111)
8.2. Formeln für die Bogenintegrale der $EK(n)$; Rekursion und Beispiele	73	(117)
8.3. Bogenlängen auf der $EK(2)$	77	(124)
8.4. Bogenlängen auf der $EK(3)$	81	(128)
8.5. Differentialgleichungen der Eikurvenfunktionen; Taylorentwicklung	88	(136)
8.6. Krümmungskreise der $EK(n)$ und Näherungskurven der Eikurvenfunkt.	92	(139)
8.7. Bemerkungen zu einheitlichen Additionsformeln für die Bogenintegrale	95	(143)
9. Ergänzungen zu 5.5. : Die $EK(n)$ als Billardbande	97	(149)
9.1. Die Berechnung von Reflexionswegen in der $EK(n)$	97	(---)
9.2. Extremaleigenschaften des Reflexionspunktes	102	(149)
9.3. Berechnung von Reflexionspunkten mit dem Extremalprinzip	104	(151)

1. Definition der Eikurven

Im Folgenden bezeichnen wir als *Eikurven* $Ek(n)$ oder *Ovoide* jene ebenen Kurven, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$Ek(n) \quad \underline{r = \lambda \cdot \cos^n(\varphi)} \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 ; n = 0, 1, 2, 3, \dots ; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

beschrieben werden.

In kartesischen Koordinaten

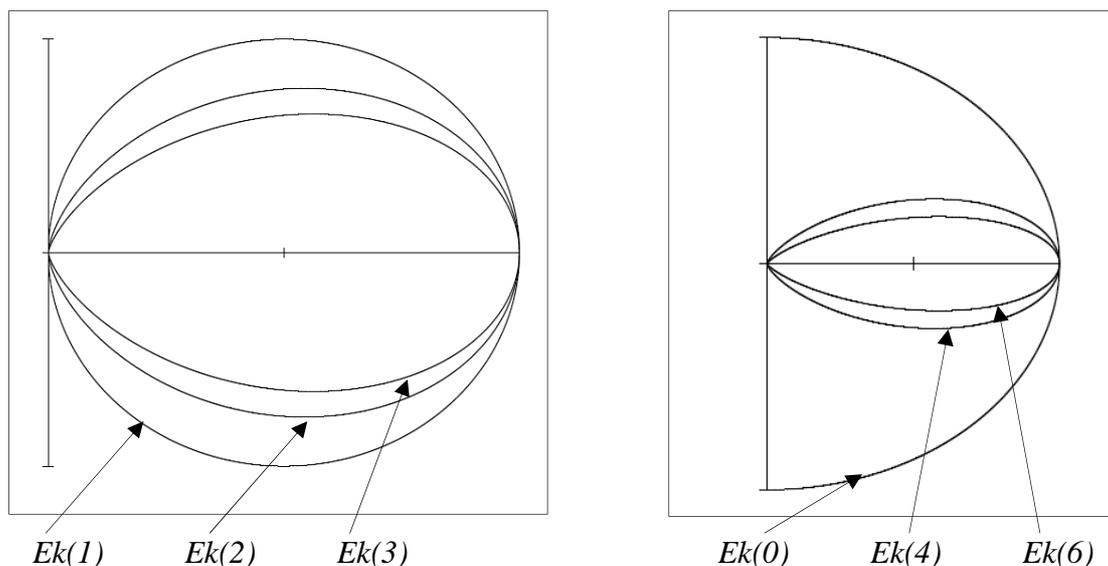
$$x = r \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi) \quad , \quad y = r \cdot \sin(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \quad (2)$$

erhalten wir die Gleichung

$$\underline{(x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot x^{2 \cdot n}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \lambda . \quad (3)$$

Für ungerades $n = 2 \cdot m - 1$ vereinfacht sich diese Gleichung zu $(x^2 + y^2)^m = \lambda \cdot x^{2 \cdot m - 1}$.

Die Bilder einiger Kurven erklären die gewählte Benennung als Eikurven. Speziell die $Ek(3)$ vermittelt den Eindruck einer Kurve, die bei Rotation um die x-Achse einen eiförmigen Körper erzeugt.



$Ek(1)$ ist der Kreis $(x - \lambda/2)^2 + y^2 = (\lambda/2)^2$ mit dem Mittelpunkt $M(\lambda/2; 0)$ und dem Radius $r = \lambda/2$. $Ek(0)$ ist der Halbkreis um den Ursprung mit dem Radius $r = \lambda$.

In der Fachliteratur existiert keine einheitliche Bezeichnung dieser Kurven. WIELEITNER¹ nennt die $Ek(n)$ mit beliebig ganzzahligem n (!) *Multiplikatrixkurven* und mit Hinweis auf weitere Autoren z.B. die $Ek(2)$ als *Doppelellinie*, die $Ek(3)$ als *Einblatt* bzw. *Folium simple*, *Ovoide* oder *eigentliches Oval*. Die von ihm erwähnte Verwendung der $Ek(3)$ durch KEPLER zur Beschreibung von Planetenbahnen wird von FLADT² bestritten, so dass die $Ek(3)$ auch manchmal *falsches Kepler-Ei* genannt wird. Wir beziehen uns auf GELLERT³, wo die $Ek(3)$ einschließlich einer Konstruktionsvorschrift beschrieben und als *Eikurve = Oval* bezeichnet wird.

¹ WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908

² FLADT: Das Keplersche Ei, Elemente der Mathematik Bd. 17 (1966) Heft 4

³ GELLERT/KÄSTNER/NEUBERT: Lexikon der Mathematik, Leipzig 1977

Um die Bezeichnung *Ovale* zu vermeiden, verwenden wir alternativ für die $Ek(n)$ die Bezeichnung *Ovoide* und folgen damit FISCHER⁴, der die $Ek(3)$ als das *Ovoid* bezeichnet.

In der Regel wird nämlich der Terminus *Oval* als Oberbegriff verwendet, der eine Vielzahl geschlossener Kurven umfasst. NAAS/SCHMID⁵ nennen ein konvexes topologisches Kreisbild *Oval* und geschlossene konvexe Kurven *Eilini*. Ähnlich werden die Eilini und das Oval auch bei ATHEN/BRUHN⁶ (unter zusätzlichen Krümmungsforderungen) definiert. In der WIKIPEDIA-Enzyklopädie⁷ wird eine geschlossene, zweimal stetig differenzierbare, konvexe ebene Kurve als *Eilinie* = *Eikurve* = *Oval* bezeichnet. Der Artikel „Oval“ enthält weitere einschlägige Links. So wird u. a. auf HARTHUN/RENNERT⁸ verwiesen, die den von uns verwendeten Begriff *Ei-Kurve* auf einen ebenen Schnitt mit einem „hyperbolischen Kegel“ anwenden, übrigens unter Bezugnahme auf das „wahre“ Kepler-Ei, das nicht die $Ek(3)$ ist, die KEPLER nach FLADT auch nicht benutzte.

Umfangreiche Informationen zu Kurven im Umfeld der $Ek(n)$ bietet die Webseite WOLFRAM MATHWORLD⁹, zum Beispiel unter „Folium“.

Die $Ek(n)$ sind laut Definition (1) symmetrisch zur x-Achse. Spiegeln wir die Kurven an der y-Achse und fügen das Spiegelbild zur Kurve hinzu, so kann die Beschränkung des Winkelbereiches aufgehoben werden. Für die so *erweiterten Eikurven* $EK(n)$ lauten die Gleichungen in Polarkoordinaten bzw. kartesischen Koordinaten

$$EK(n) \quad \underline{r^2 = \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi)} \quad -\infty \leq \varphi \leq +\infty, \quad \underline{(x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot x^{2n}} \quad -\lambda \leq x \leq \lambda \quad (4)$$

und erfüllen die Symmetrie- bzw. Periodizitätsbeziehungen

$$r(\varphi) = r(-\varphi) = r(\pi - \varphi) = r(\varphi + 2 \cdot \pi). \quad (5)$$

Für gerade Exponenten $n = 2 \cdot m$ gilt $EK(2m) = Ek(2m)$. Die Kurven $Ek(2m)$, $m > 0$ haben im Ursprung O keinen Schnittpunkt, sondern die Kurvenpunkte durchlaufen mit wachsendem φ die Kurven in der Reihenfolge der Quadranten I – IV. Diesen Verlauf übernehmen wir für alle $EK(n)$.

2. Konstruktionen, Verallgemeinerungen

Die Eikurven können konstruktiv auf verschiedene Weise und nicht immer einheitlich erzeugt werden, abhängig von dem Kontext, wie zum Beispiel bei WIELEITNER nachzulesen ist, wo auch dessen Bezeichnung der $Ek(n)$ als Multiplikatrixkurven erklärt wird. Wir verwenden die aus der Definitionsgleichung (1) hervorgehende einheitliche Konstruktionsvorschrift.

Aus einer gegebenen Kurve $EK(n)$ werden $EK(n+1)$ und $EK(n+2)$ wie folgt konstruiert:

Schritt 1. Von dem Punkt P auf $EK(n)$ wird das Lot ℓ auf die x-Achse gefällt mit dem Fußpunkt Q . Dann ist nach (2) $\overline{OQ} = x = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi)$.

Schritt 2. Um O wird der Kreisbogen b mit dem Radius \overline{OQ} geschlagen und mit \overline{OP} geschnitten. Der Schnittpunkt P^* ist ein Punkt der $EK(n+1)$.

Schritt 3. Von Punkt Q wird das Lot d auf \overline{OP} gefällt. Dann ist der Fußpunkt P^{**} wegen $\overline{OP^{**}} = x \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+2}(\varphi)$ ein Punkt der $EK(n+2)$.

⁴ FISCHER: Ebene algebraische Kurven, Braunschweig 1994

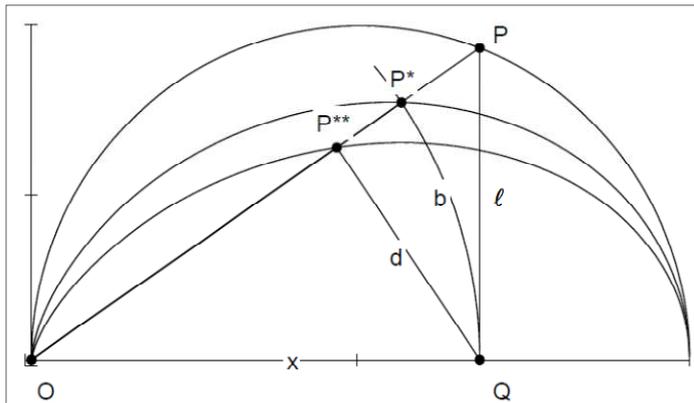
⁵ NAAS/SCHMID: Mathematisches Wörterbuch, Leipzig 1961

⁶ ATHEN/BRUHN: Lexikon der Schulmathematik, Augsburg 1994

⁷ Oval – Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Oval&printable=yes>

⁸ HARTHUN/RENNERT: „Die Ei-Kurve als Schnitt des ..“, http://www.pks.or.at/Resources/Ei_-Kurve_plus.pdf

⁹ <http://mathworld.wolfram.com/Folium.html>



Konstruktion der Eikurven

Die Schritte 1+2 nennen wir die *Lot-Bogen-Konstruktion* (ℓb) und die Schritte 1+3 entsprechend *Doppellot-Konstruktion* (ℓd).

Die Schritte können auch von P^{**} oder P^* nach P ausgeführt werden. Wir bezeichnen diese *rückführenden Konstruktionen* mit $(d\ell)$ und $(b\ell)$.

$$P \in EK(n) \Rightarrow P^* \in EK(n+1), P^{**} \in EK(n+2)$$

Durch die rückführenden Konstruktionen werden „Eikurven“ $E_k(n)$ mit $n < 0$ erzeugt, die nicht mehr geschlossen sind. So liefern beispielsweise die $(d\ell)$ -Konstruktion aus $E_k(1)$ und die $(b\ell)$ -Konstruktion aus $E_k(0)$ die Gerade $E_k(-1)$ mit $r = \lambda / \cos(\varphi)$ bzw. $x = \lambda$. Die $E_k(-2)$ nennt WIELEITNER *kubische Duplikatrix*, weil sie der graphischen Würfelverdopplung dient.

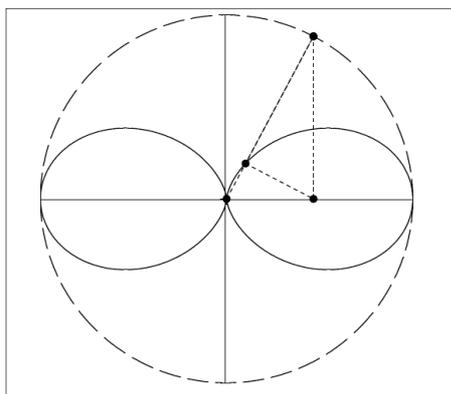
Die Lot-Bogen- und Doppellot-Konstruktionen können auf beliebige ebene Kurven und für beliebige Lagen der Bezugsachse g und des Ursprungs O angewendet werden!

Sind $O \in g$ und $g = x$ ein Polarkoordinatensystem, dann erhalten wir die Zuordnungen

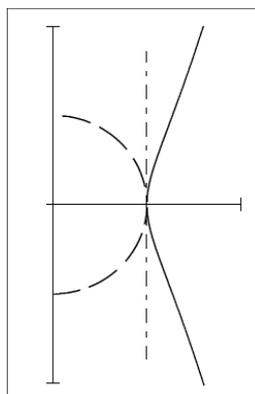
$$(\ell b): r = r(\varphi) \Rightarrow r = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \quad (\ell d): r = r(\varphi) \Rightarrow r = r(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) \quad (6)$$

Ist die Kurve z. B. ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf der x -Achse und O auf der Peripherie, so entstehen durch wiederholte Doppellotkonstruktion die $E_k(2m-1)$. Verschieben wir O in den Kreismittelpunkt, so erhalten wir die $E_k(2m)$. Verlegen wir die x -Achse mit Ursprung O auf die (untere) Peripherie des Kreises, so entsteht die Doppellotkurve $r = \lambda \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi)$. Das Kurvenbild wird (gerades) *Zweiblatt* genannt.

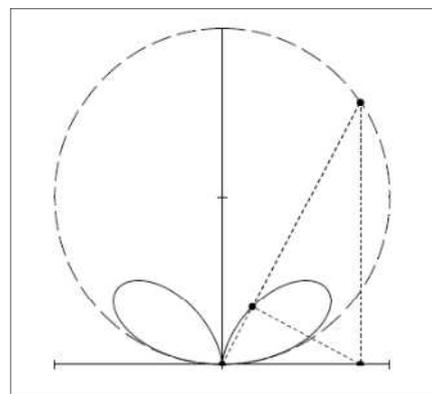
Doppelleinie EK(2)



Duplikatrix Ek(-2)



Zweiblatt



$$r = \lambda \cdot \cos^2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$r = \frac{\lambda}{\cos^2(\varphi)}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r = \lambda \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Der Herstellung weiterer Kurven sind keine Grenzen gesetzt.[#] Unsere Betrachtungen werden sich jedoch auf Eikurven mit positivem n beschränken, wobei das Interesse insbesondere dem klassischen *Ovoid* $E_k(3)$ und der Erweiterung $EK(3)$ gilt.

[#] Siehe J. KÖLLER: Eilinie und Ovale, <http://www.mathematische-basteleien.de>

3. Kurvenlängen, Flächeninhalte, Volumina

3.1. Kurvenumfang der Eikurven

Die Berechnung des Kurvenumfangs $U(n)$ der Eikurve $Ek(n)$: $r = \lambda \cdot \cos^n(\varphi)$, $n > 0$ führt auf das Integral

$$\begin{aligned} U(n) &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi) + \lambda^2 \cdot n^2 \cos^{2n-2}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi, \\ &= 2\lambda \cdot n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(\varphi) \cdot \sqrt{1 - (1 - 1/n^2) \cdot \cos^2(\varphi)} d\varphi, \end{aligned}$$

das nach der Substitution von $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ folgende Form erhält:

$$\underline{U(n) = 2\lambda \cdot n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(\varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi}, \quad k^2 := 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (7)$$

Dieses Integral ist nicht mehr für jedes n elementar lösbar. Wir werden uns später ausführlich der Berechnung von Kurvenlängen zuwenden. Hier beschränken wir uns auf $n = 1, 2, 3$.

$$U(1) = 2\lambda \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1} d\varphi = \pi \cdot \lambda, \quad \text{Kreisumfang des Kreises mit dem Durchmesser } \lambda.$$

$$\begin{aligned} U(2) &= 4\lambda \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi = 4\lambda \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\varphi)}{2} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2(\varphi)} d\varphi \\ &= -2\lambda \cdot \int_1^0 \sqrt{1 + 3 \cdot z^2} dz = 2\lambda \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(z \cdot \sqrt{1/3 + z^2} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arsinh}(\sqrt{3} \cdot z) \right) \right]_0^1 \\ &= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}) \right) \cdot \lambda \approx 2,76035 \cdot \lambda, \end{aligned}$$

$U(3) = 6\lambda \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi$, $k^2 = \frac{8}{9}$ ist ein *vollständiges elliptisches Integral*, das auf tabellierte Integrale¹⁰ zurückführbar ist, (was wir später näher ausführen):

$$\begin{aligned} U(3) &= 6\lambda \cdot \frac{1}{3} \left[(1 - 2k^2) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} \right] \\ &= 2 \cdot \left[-\frac{7}{9} \cdot \mathbf{D}(k) + \mathbf{K}(k) \right] \cdot \lambda \approx 2 \cdot \left[-\frac{7}{9} \cdot 1,5917 + 2,5286 \right] \cdot \lambda \approx 2,5812 \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Natürlich lassen sich die Integrale mit geeigneten Programmen auch numerisch auswerten oder durch Computeralgebrasysteme vereinfachen.¹¹

¹⁰ Siehe z. B. JAHNKE/EMDE: Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1948 (oder neuerer Tafelwerke)

¹¹ Wir verwenden MATHCAD[®]14 und MAPLE[®]13.

Die Tabelle enthält einige numerisch ermittelte Näherungswerte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$U(n)/\lambda$	3,1416	2,7604	2,5812	2,4750	2,4040	2,3528	2,3141	2,2836	2,2589

Dem Bild der ineinander geschachtelten Kurven entnehmen wir die Ungleichungen

$$\pi \cdot \lambda = U(1) > U(2) > U(3) > \dots > U(n) > U(n+1) > \dots > 2 \cdot \lambda. \quad (8)$$

Die Anschauung stützt sich auf den Satz, dass der Umfang einer beschränkten konvexen Fläche nicht kleiner ist als der Umfang einer in ihr enthaltenen konvexen Fläche. Der Beweis dafür erfolgt für konvexe Vielecke und wird auf die Kurvenlängen (als Supremum aller einbeschriebenen endlichen Streckenzüge) erweitert.¹²

Die untere Schranke 2λ drückt aus, dass die Gerade die Kürzeste zwischen zwei Punkten ist.

3.2. Flächeninhalte und Flächenschwerpunkt

Den Inhalt $A(n)$ der Eifläche der $Ek(n)$ finden wir (mit einer geeigneten Formelsammlung¹³):

$$\underline{A(n)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \lambda^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \lambda^2. \quad (9)$$

Daraus folgt das rationale Verhältnis der Eiflächen ($n > 1$) zur Umkreisfläche $A_{Umkreis} = A(1)$

$$A(n) = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot A_{Umkreis} \quad \text{und speziell} \quad A(3) = \frac{5}{8} \cdot A_{Umkreis}. \quad (10), (10a)$$

Für die Darstellung des Verhältnisses der Eifläche zur Fläche $A_{Rechteck}$ des umschriebenen Rechtecks ermitteln wir die Koordinaten des Extrempunktes $P_{\max}(x_{\max}, y_{\max} > 0)$ auf der $Ek(n)$ mit dem Winkel φ_{\max} .

Aus $\frac{d}{d\varphi} y(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} (\lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi)) = \lambda \cdot \cos^{n-1}(\varphi) \cdot (\cos^2(\varphi) - n \cdot \sin^2(\varphi)) = 0$ folgt

$$\underline{\tan(\varphi_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \cos^2(\varphi_{\max}) = \frac{n}{n+1}, \quad x_{\max} = \lambda \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x_m. \quad (11)$$

Wegen $A_{Rechteck} = 2 \cdot y_{\max} \cdot \lambda$ gilt mit der Abkürzung $(n)!! := n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot (1 \vee 2)$

$$A(n) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot A_{Rechteck}(n), \quad (12)$$

und speziell für den Kreis und das Ovoid

$$A(1) = \frac{\pi}{4} \cdot A_{Rechteck}(1), \quad A(3) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot A_{Rechteck}(3). \quad (12a)$$

¹² Siehe u. a. JAGLOM/BOLTJANSKI: Konvexe Figuren, Berlin 1956

¹³ Zum Beispiel GRADSTEIN/RYSHIK: Tafel oder BRONSTEIN u.a.: Taschenbuch der Mathematik

Zu Berechnung der Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s > 0)$ der oberhalb der x-Achse liegenden halben Eifläche benötigen wir die statischen Flächenmomente. Für diese gilt bzgl. der Koordinatenachsen (in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ und $x(\pi/2) = 0, x(0) = \lambda$)

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(\varphi)^2 \cdot \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\varphi)^2 \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} d\varphi. \quad (13)$$

Daraus folgt für die $Ek(n)$ nach (2)

$$M_x(n) = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2n}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) \cdot (n+1) \cdot \cos^n(\varphi) \cdot (-\sin(\varphi)) d\varphi.$$

Das Integral ist elementar lösbar

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^{3n}(\varphi) - \cos^{3n+2}(\varphi))(-\sin(\varphi)) d\varphi = \left[\frac{\cos^{3n+1}(\varphi)}{3n+1} - \frac{\cos^{3n+3}(\varphi)}{3n+3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{(3n+3) \cdot (3n+1)}.$$

$$M_x(n) = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot n+1} \quad \text{und speziell} \quad M_x(1) = \frac{\lambda^3}{12}, \quad M_x(3) = \frac{\lambda^3}{30}. \quad (14)$$

Analog finden wir mit (13),(2) $M_y(n) = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} -n \cdot \cos^{3n+1}(\varphi) + (n+1) \cdot \cos^{3n+3}(\varphi) d\varphi,$

$$\text{was uns auf das spezielle Integral } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\varphi) d\varphi = \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{g(m)} \text{ führt.}^{14} \quad (15)$$

Darin nimmt der Exponent die Werte $g(2n) = 1$ bzw. $g(2n+1) = 0$ an. Weiterhin setzen wir $u(m) := 1 - g(m)$. $(m)!! := m \cdot (m-2) \cdot (m-4) \cdot \dots$ ist das in (12) benutzte Produkt, das für gerades m mit dem Faktor 2 und für ungerades m mit dem Faktor 1 endet.

$$\text{Mit (15) folgt } M_y(n) = \frac{\lambda^3}{2} \cdot \left[-n \cdot \frac{(3n)!!}{(3n+1)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{u(n)} + (n+1) \cdot \frac{(3n+2)!!}{(3n+3)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{u(n)} \right]$$

und nach Ausklammern gemeinsamer Faktoren

$$M_y(n) = \frac{\lambda^3}{3} \cdot \frac{(3n)!!}{(3n+1)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{u(n)}, \quad \text{speziell } M_y(1) = \frac{\pi \cdot \lambda^3}{16}, \quad M_y(3) = \frac{21 \cdot \pi \cdot \lambda^3}{512}. \quad (16)$$

Wir erhalten damit die Schwerpunktkoordinaten $x_s = \frac{2M_y}{A}, y_s = \frac{2M_x}{A}$ für die Halbfäche

$$x_s(n) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{(3n)!! \cdot (2n)!!}{(3n+1)!! \cdot (2n-1)!!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{g(n)}, \quad y_s(n) = \frac{2\lambda}{3 \cdot (3n+1)} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi}. \quad (17)$$

¹⁴ Dieses Integral und viele weitere interessante bestimmte Integrale, Grenzwerte und Reihen etc. werden im FICHTENHOLZ: Differential- und Integralrechnung Band 2, Berlin 1971 ausführlich behandelt.

Einige ausgeführte Beispiele:

$$x_s(1) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 1} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^0 = \frac{\lambda}{2}$$

$$y_s(1) = \frac{2\lambda}{3 \cdot (3+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2 \cdot \lambda}{3 \cdot \pi}$$

$$x_s(2) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^1 = \frac{512 \cdot \lambda}{315 \cdot \pi}$$

$$y_s(2) = \frac{2\lambda}{3 \cdot (6+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{32 \cdot \lambda}{63 \cdot \pi}$$

$$x_s(3) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^0 = \frac{21 \cdot \lambda}{40}$$

$$y_s(3) = \frac{2\lambda}{3 \cdot (9+1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{32 \cdot \lambda}{75 \cdot \pi}$$

Abschließend betrachten wir für einige Kennwerte das Verhalten mit wachsendem $n \rightarrow \infty$. Dazu benötigen wir zwei klassische Grenzwerte

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} \rightarrow e \text{ (EULER)}, \quad p(n) := \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ (WALLIS)}. \quad (18a,b)$$

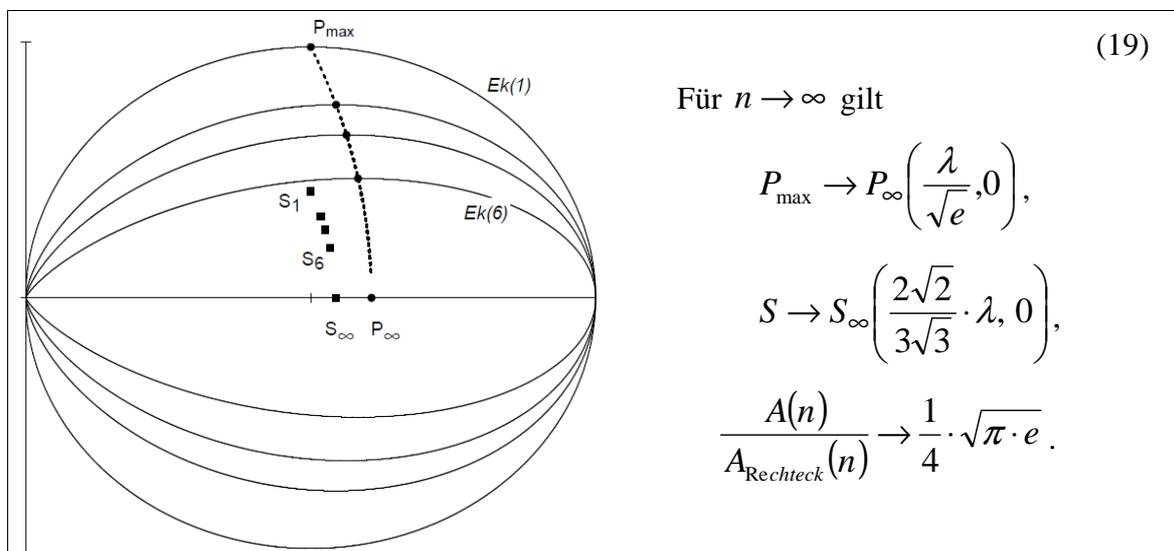
$$\frac{A(n)}{A_{\text{Rechteck}}(n)} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{p(n)} \sqrt{\frac{n}{2n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot e},$$

$$x_{\max}(n) = \lambda \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \lambda \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}} \rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{e}}, \quad y_{\max}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot x_m(n) \rightarrow 0,$$

$$x_s(2m) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{(6n)!! \cdot (4n)!!}{(6n+1)!! \cdot (4n-1)!!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot g(3n) \cdot g(2n) \cdot \sqrt{\frac{6n \cdot 4n}{(6n+1)^2}} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \lambda,$$

$$\text{analog } x_s(2m+1) = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{(6m+3)!! \cdot (4m+2)!!}{(6m+4)!! \cdot (4m+1)!!} = \frac{2\lambda}{3} \cdot \frac{g(2m+1)}{g(3m+2)} \cdot \sqrt{\frac{4n+2}{6m+4}} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \lambda,$$

$$y_s(n) = \frac{2\lambda}{3 \cdot (3n+1)} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4\lambda}{3 \cdot \pi} \cdot g(n) \cdot \sqrt{\frac{2n}{(3n+1)^2}} \rightarrow 0.$$



Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$P_{\max} \rightarrow P_{\infty} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{e}}, 0 \right),$$

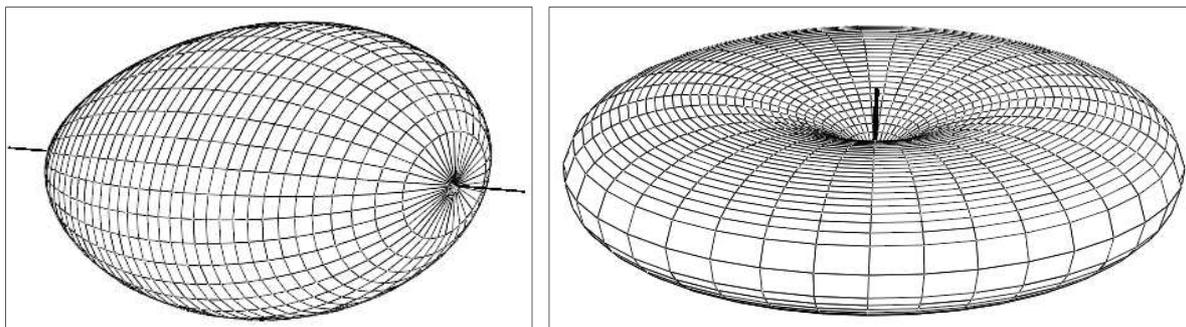
$$S \rightarrow S_{\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cdot \lambda, 0 \right),$$

$$\frac{A(n)}{A_{\text{Rechteck}}(n)} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\pi \cdot e}.$$

3.3. Volumen und Oberfläche der Rotationskörper von Eiflächen

Rotiert die obere Hälfte der *Ovoid*-Fläche um die x-Achse, so entsteht ein eiförmiger Körper, dem die *Ek(n)* ihren Namen verdanken. Wir werden für alle *Ek(n)* die Körper betrachten, die bei Rotation sowohl um die x-Achse als auch um die y-Achse entstehen.

Die Bilder zeigen die typischen Formen am Beispiel der *Ek(3)*.



Nach der GULDINSchen Regel ist das Volumen eines Rotationskörpers gleich dem Produkt aus dem Inhalt der rotierenden Fläche und der Länge des Weges des Flächenschwerpunktes. Aus der Definition der Schwerpunktkoordinaten (Seite 6)¹⁵ folgt

$$V_x(n) = \frac{1}{2} A(n) \cdot 2\pi \cdot y_S(n) = 2\pi \cdot M_x, \quad V_y(n) = A(n) \cdot 2\pi \cdot x_S(n) = 4\pi \cdot M_y. \quad (20)$$

Wir setzen (14) bzw. (16) ein und erhalten

$$V_x(n) = \frac{4}{3n+1} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \lambda^3 = \frac{4}{3n+1} \cdot V_{UK}, \quad \text{speziell } V_x(3) = \frac{2}{5} \cdot V_{UK}, \quad (21)$$

$$V_y(n) = \frac{(3n)!!}{(3n+1)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{u(n)} \frac{4\pi}{3} \cdot \lambda^3 = \frac{12 \cdot (3n)!!}{\pi \cdot (3n+1)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{u(n)} \cdot V_{UT}, \quad (22)$$

$$\text{speziell } V_y(1) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \lambda^3, \quad V_y(2) = \frac{64\pi}{315} \cdot \lambda^3, \quad V_y(3) = \frac{21\pi^2}{128} \cdot \lambda^3 = \frac{21}{32} \cdot V_{UT}. \quad (22a)$$

$V_{UK} = V_x(1)$ ist das Volumen der Umkreis-kugel und $V_{UT} = V_y(1)$ das Volumen des umschriebenen Torus (ohne Innenradius).

Übrigens können $V_x(n)$ (und analog $M_x(n)$) auch sehr einfach in kartesischen Koordinaten (3) ermittelt werden

$$V_x(n) = \pi \cdot \int_0^\lambda y^2 dx = \pi \cdot \int_0^\lambda \left(\frac{2}{\lambda^{n+1}} \cdot x^{n+1} - x^2 \right) dx = \pi \cdot \left[\frac{n+1}{3n+1} \cdot \lambda^{\frac{3n+3}{n+1}} - \frac{1}{3} \cdot \lambda^3 \right] = \frac{2\pi}{9n+3} \cdot \lambda^3.$$

Die kartesischen Koordinaten sind aber ungeeignet für die Integration zur Berechnung von $V_y(n)$.

¹⁵ Eine geeignete Formelübersicht für Rotationskörper enthält z.B. PAPULA: Mathematische Formelsammlung.

Die x-Koordinate des Schwerpunktes $S_K(x_K, y_K = 0, z_K = 0)$ der Eikörper wird mit Hilfe des auf die yz-Ebene bezogenen Moments M_{yz} berechnet.

$$M_{yz}(n) = \pi \cdot \int_0^\lambda x \cdot y^2 dx = \pi \cdot \int_0^\lambda \left(\frac{2}{\lambda^{n+1}} \cdot x^{\frac{3n+1}{n+1}} - x^3 \right) dx = \frac{\pi}{4 \cdot (2n+1)} \cdot \lambda^4, \quad x_K = \frac{M_{yz}}{V_x},$$

$$x_K(n) = \frac{3 \cdot (3n+1)}{8 \cdot (2n+1)} \cdot \lambda, \quad \text{speziell } x_K(3) = \frac{15}{28} \cdot \lambda \quad \text{und} \quad x_K(\infty) = \frac{9}{16} \cdot \lambda. \quad (23)$$

Wenden wir uns der Berechnung der Oberfläche der Eikörper zu. Für Rotationskörper gilt

$$O_x = 2\pi \cdot \int_0^\lambda y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \cdot \int_0^\lambda \sqrt{y^2 + \left(y \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (24)$$

Mit (3) $y^2 = \frac{2}{\lambda^{n+1}} \cdot x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2$ und der Ableitung $2 \cdot y \cdot y' = \frac{2}{\lambda^{n+1}} \cdot \frac{2n}{n+1} x^{\frac{n-1}{n+1}} - 2 \cdot x$

erhält das Integral nach einigen Umformungen die Gestalt

$$O_x(n) = \frac{2\pi \cdot n}{n+1} \cdot \frac{2}{\lambda^{n+1}} \cdot \int_0^\lambda x^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \sqrt{1-t} dx \quad \text{mit } t = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \lambda^{\frac{-2}{n+1}} \cdot x^{\frac{2}{n+1}}.$$

Wir trennen den Fall $n = 1$ ab und erhalten $O_{Kugel} = O_x(1) = \pi \cdot \lambda^2$.

Für $n > 1$ substituieren wir t unter der Beachtung von $dt = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \lambda^{\frac{-2}{n+1}} \cdot \frac{2}{n+1} x^{-\frac{n-1}{n+1}} dx$ und

$t(x=0) = 0$, $t(x=\lambda) = \frac{n^2-1}{n^2}$, vereinfachen anschließend den Ausdruck und erhalten

$$O_x(n) = \pi \cdot \lambda^2 \cdot n \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \int_0^{\frac{n^2-1}{n^2}} t^{n-1} \cdot \sqrt{1-t} dt. \quad (25)$$

Das Integral stellt die *unvollständige Betafunktion* dar ($u := 1 - t$)

$$B_z(p; q) := \int_0^z t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1} dt = \int_{1-z}^1 u^{q-1} \cdot (1-u)^{p-1} du. \quad (26)$$

Die Oberflächenformel der Eikörper zu $Ek(n)$ lautet mittels der unvollständigen Betafunktion:

$$O_x(n) = \frac{\pi \cdot n \cdot \lambda^2}{k^{2n}} \cdot B_{k^2} \left(n; \frac{3}{2} \right), \quad k^2 := 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n > 1. \quad (25a)$$

Das Integral $B_z(p; q)$ ist nur selten (und im Zusammenhang mit der Betaverteilung) tabelliert.¹⁶

¹⁶ PEARSON: Tables of incomplete Beta-Functions, Cambridge 1968. Siehe auch Fußnote 10.

Unser Fall liefert aber eine geschlossene Lösung. Da $p = n$ eine natürliche Zahl ist, lässt sich der Integrand in (26) als Summe schreiben und elementar integrieren. Wir führen das mit

$$q-1 = \frac{1}{2} \quad \text{aus:} \quad \int_{1/n^2}^1 u^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m} \cdot u^m \, du = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m} \cdot \frac{2}{2m+3} \cdot u^{\frac{2m+3}{2}} \Big|_{1/n^2}^1 \quad \text{und}$$

erhalten die endgültige, wenn auch sperrige Oberflächenformel für $n > 1$

$$O_x(n) = \pi \cdot \lambda^2 \cdot \frac{2 \cdot n}{(k^2)^n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cdot \binom{n-1}{m} \cdot \frac{1}{2m+3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{2m+3}}\right), \quad k^2 := 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (27)$$

und die speziellen Werte

$$O_{Kugel} = O_x(1) = \pi \cdot \lambda^2, \quad O_x(2) = \frac{94}{135} \cdot \pi \cdot \lambda^2 \approx \frac{16}{23} \cdot \pi \cdot \lambda^2, \\ O_x(3) = \frac{313}{560} \cdot \pi \cdot \lambda^2 \approx \frac{5}{9} \cdot \pi \cdot \lambda^2, \quad O_x(4) = \frac{10454}{21875} \cdot \pi \cdot \lambda^2 \approx \frac{11}{23} \cdot \pi \cdot \lambda^2. \quad (27a)$$

Die Näherungsbrüche stammen aus der Kettenbruchentwicklung der exakten Brüche und sind mindestens auf zwei Dezimalstellen genau.

Wenn die $Ek(n)$ um die y-Achse rotiert, entsteht der oben dargestellte torusförmige Körper, dessen Oberfläche wir mittels Polarkoordinaten (in Parameterform der Formeln (2)) ermitteln

$$O_y = 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} x(\varphi) \cdot \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} \, d\varphi. \quad (28)$$

Wir setzen $x(\varphi)$ sowie die Ableitungen nach φ : $\dot{x}(\varphi) = -(n+1) \cdot \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$ und $\dot{y}(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi) - \lambda \cdot \cos^{n-1}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$ in das Integral ein, formen den Integranden um,

erhalten schließlich $O_y = 4\pi \cdot n \cdot \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(\varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \, d\varphi$ mit $k^2 = 1 - 1/n^2$. Nach

Substitution von $(\pi/2 - \varphi)$ für φ entsteht die von uns benötigte Integralformel:

$$O_y(n) = 4\pi \cdot n \cdot \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\varphi) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} \cdot d\varphi, \quad k^2 = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (29)$$

Dieses Integral gehört zum gleichen Typ wie das des Kurvenumfangs $U(3)$. Es wird ebenfalls auf die vollständigen elliptischen Integrale $\mathbf{K}(k)$ und $\mathbf{D}(k)$ zurückgeführt.

Für $n = 1$ ist es elementar auflösbar: $\int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) \cdot \sqrt{1} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad O_y(1) = \pi^2 \cdot \lambda^2. \quad (29a)$

Die Oberfläche des Torus folgt auch aus der GULDINSchen Regel für Flächen, hier also

„Kreisumfang mal Weg des Kreismittelpunktes“ $O_{Torus} = (\pi \cdot \lambda) \times (\pi \cdot \lambda) = (\pi \cdot \lambda)^2.$

Für $n = 3$ geben wir das Ergebnis der Rückführung auf $\mathbf{K}(k)$ und $\mathbf{D}(k)$ an und verwenden die genäherten Tafelwerte für $k^2 = 8/9$

$$O_y(3) = 12 \cdot \pi \cdot \lambda^2 \cdot \left[\frac{71}{560} \cdot \mathbf{K}(k) - \frac{11}{180} \cdot \mathbf{D}(k) \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{213}{140} \cdot 2,529 - \frac{11}{15} \cdot 1,592 \right] \cdot (\pi \cdot \lambda)^2 \quad (29b)$$

$$= 0,853 \cdot O_{Torus}.$$

Weitere durch numerische Integration ermittelte Näherungswerte enthält die folgende Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	...	∞
$O_y(n)/(\pi \cdot \lambda)^2$	1	0,9049	0,8530	0,8197	0,7963	0,7787	0,7651	...	0,6366 = $2/\pi$

Für $n \rightarrow \infty$ entartet der Körper zu einer doppelseitigen Kreisfläche $O_y(n) \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \lambda^2$.

4. Elliptische und verwandte Integrale; Ellipse und Eikurve¹⁷

4.1. Eine Rekursionsformel für elliptische Integrale und Folgerungen

Die in den Formeln (7) und (29) auftretenden Integrale sind Beispiele sogenannter *elliptischer Integrale* und erhielten ihren Namen, weil sie erstmals bei der Bestimmung des Umfangs der Ellipse auftraten. Sie können auf *drei* spezielle Integrale zurückgeführt werden. Nur eins dieser speziellen Integrale ist elementar lösbar (und wird deshalb auch *pseudoelliptisch* genannt). Die elliptischen Integrale bilden als Funktionen der oberen Grenze ϕ bzw. des *Moduls* k eine neue, weitläufig untersuchte Klasse nichtelementarer Funktionen.

Die von uns oben benutzte Rekursionsformel bezieht sich auf die bestimmten Integrale

$$I_n(k, \phi) := \int_0^\phi \frac{\sin^n(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k^2 < 1, \quad k \text{ unabhängig von } n. \quad (30)$$

Für $\phi = \pi/2$ ergeben sich daraus die *vollständigen* Integrale $\mathbf{I}_n(k) := I_n\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$ (31)

Wir differenzieren den Ausdruck $F(\varphi) := \sin^{n+1}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}$ nach φ und ersetzen $\cos^2(\varphi)$ durch $1 - \sin^2(\varphi)$, bringen das Ergebnis auf den gleichen Nenner, ordnen nach Potenzen von $\sin(\varphi)$ und erhalten

$$\frac{d}{d\varphi} F(\varphi) = \frac{(n+3) \cdot k^2 \cdot \sin^{n+4}(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} - \frac{(n+2) \cdot (1+k^2) \cdot \sin^{n+2}(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} + \frac{(n+1) \cdot \sin^n(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}.$$

Beidseitige bestimmte Integration in den Grenzen von 0 bis ϕ liefert die Rekursionsformel

$$F(\phi) = (n+3) \cdot k^2 \cdot I_{n+4}(k, \phi) - (n+2) \cdot (1+k^2) \cdot I_{n+2}(k, \phi) + (n+1) \cdot I_n(k, \phi) \quad . \quad (32)$$

¹⁷ Für die Literatur zu diesem Abschnitt verweisen wir auf die Fußnoten 14, 10, 13.

Da $F(\pi/2) = 0$ ist, folgt aus (32) für die vollständigen Integrale

$$(n+3) \cdot k^2 \cdot \mathbf{I}_{n+4}(k) - (n+2) \cdot (1+k^2) \cdot \mathbf{I}_{n+2}(k) + (n+1) \cdot \mathbf{I}_n(k) = 0. \quad (33)$$

Damit lassen sich die Integrale mit geradem Index auf $\mathbf{I}_0(k)$ und $\mathbf{I}_2(k)$ zurückführen. Diese vollständigen elliptischen Integrale sind uns schon bekannt:

$$\mathbf{K}(k) := \mathbf{I}_0(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi, \quad \mathbf{D}(k) := \mathbf{I}_2(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi. \quad (34a,b)$$

In der Literatur (und in Computeralgebrasystemen) wird in der Regel statt $\mathbf{D}(k)$ das Integral

$$\mathbf{E}(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi = \mathbf{K}(k) - k^2 \cdot \mathbf{D}(k) \quad (34c)$$

verwendet. $\mathbf{K}(k)$ und $\mathbf{E}(k)$ heißen vollständige elliptische Integrale *erster* und *zweiter Gattung*.

Die Integrale mit ungeradem Index führen auf $\mathbf{I}_1(k)$ und $\mathbf{I}_3(k)$ zurück.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{(1-k^2) + k^2 \cos^2(\varphi)}} d\varphi = \int_k^0 \frac{1}{\sqrt{(1-k^2) + t^2}} \cdot \frac{-1}{k} dt \\ \mathbf{I}_1(k) &= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{artanh}(k) = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right). \end{aligned} \quad (35a)$$

$\mathbf{I}_3(k)$ kann durch $\mathbf{I}_1(k)$ ersetzt werden, denn die Rekursionsformel (32) gilt auch für $n = -1$, wie man der Herleitung entnimmt, wobei der dritte Summand entfällt und $F(\pi/2) = -1$ ist.

$$\text{Es folgt aus (33)} \quad 2 \cdot k^2 \cdot \mathbf{I}_3(k) = (1+k^2) \cdot \mathbf{I}_1(k) - 1. \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} &\frac{k^2 + 1}{2 \cdot k^2} \cdot \mathbf{I}_1 - \frac{1}{2 \cdot k^2} \\ &\frac{2 \cdot k^2 + 2}{3 \cdot k^2} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{3 \cdot k^2} \cdot \mathbf{K} \\ &\frac{3 \cdot k^4 + 2 \cdot k^2 + 3}{8 \cdot k^4} \cdot \mathbf{I}_1 - \frac{3 \cdot k^2 + 3}{8 \cdot k^4} \\ &\frac{8 \cdot k^4 + 7 \cdot k^2 + 8}{15 \cdot k^4} \cdot \mathbf{D} - \frac{4 \cdot k^2 + 4}{15 \cdot k^4} \cdot \mathbf{K} \\ &\frac{15 \cdot k^6 + 9 \cdot k^4 + 9 \cdot k^2 + 15}{48 \cdot k^6} \cdot \mathbf{I}_1 - \frac{15 \cdot k^4 + 14 \cdot k^2 + 15}{48 \cdot k^6} \\ &\frac{48 \cdot k^6 + 40 \cdot k^4 + 40 \cdot k^2 + 48}{105 \cdot k^6} \cdot \mathbf{D} - \frac{24 \cdot k^4 + 23 \cdot k^2 + 24}{105 \cdot k^6} \cdot \mathbf{K} \end{aligned} \quad (36)$$

Die Tabelle enthält für $\mathbf{I}_3(k)$ bis zu $\mathbf{I}_8(k)$ die Darstellungen durch $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ oder $\mathbf{I}_1(k)$.

Nach Bedarf kann \mathbf{D} durch \mathbf{E} ersetzt werden:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{E}}{k^2}.$$

Die Formeln wurden mit MATHCAD erstellt. Es bietet sich generell an, für die Numerik oder Formelmanipulation Computeralgebra-Systeme zu nutzen.

Wir wenden die Formeln auf das Integral

$$\int_0^{\pi} \sin^n(\varphi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(\varphi) - k^2 \cdot \sin^{n+2}(\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} d\varphi = \mathbf{I}_n(k) - k^2 \cdot \mathbf{I}_{n+2}(k) \quad (37)$$

an und erhalten aus (36) nach Einsetzen von $k^2 = 1 - 1/n^2$ und Vereinfachung

$$\text{aus (7)} \quad U(3) = 2\lambda \cdot 3 \cdot \left[\mathbf{I}_2(\sqrt{8/9}) - \frac{8}{9} \cdot \mathbf{I}_4(\sqrt{8/9}) \right] = 6 \cdot \lambda \cdot \left[\frac{\mathbf{K}(\sqrt{8/9})}{3} - \frac{7 \cdot \mathbf{D}(\sqrt{8/9})}{27} \right]$$

und aus (29)

$$O_y(3) = 4\pi \cdot 3 \cdot \lambda^2 \cdot \left[\mathbf{I}_6(\sqrt{8/9}) - \frac{8}{9} \cdot \mathbf{I}_8(\sqrt{8/9}) \right] = 12\pi \cdot \lambda^2 \cdot \left[\frac{71 \cdot \mathbf{K}(\sqrt{8/9})}{560} - \frac{11 \cdot \mathbf{D}(\sqrt{8/9})}{180} \right].$$

Schließlich folgen noch

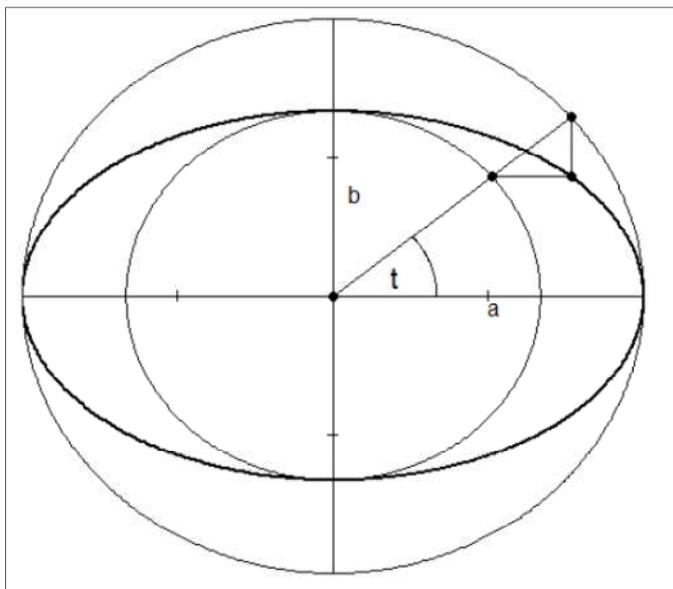
$$U(2) = 2\lambda \cdot 2 \cdot \left[\mathbf{I}_1(\sqrt{3/4}) - \frac{3}{4} \cdot \mathbf{I}_3(\sqrt{3/4}) \right] = 4 \cdot \lambda \cdot \left[\frac{\mathbf{I}_1(\sqrt{3/4})}{8} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{arsinh}(\sqrt{3}) + 2,$$

$$U(4) = 2\lambda \cdot 4 \cdot \left[\mathbf{I}_3(\sqrt{15/16}) - \frac{15}{16} \cdot \mathbf{I}_5(\sqrt{15/16}) \right] = 8\lambda \cdot \left[\frac{61}{1920} \mathbf{I}_1(\sqrt{15/16}) + \frac{29}{120} \right] = \\ = \left[\frac{61}{60 \cdot \sqrt{15}} \cdot \text{arsinh}(\sqrt{15}) + \frac{29}{15} \right] \cdot \lambda \approx 2,47499 \cdot \lambda.$$

4.2. Ellipsen und Eikurven

Zum Vergleich mit den Eikurven stellen wir für Ellipsen analoge Umfang-, Flächen- und Volumenformeln zusammen.

Die *Ellipse* $EL(b)$ habe stets die große Achse $\lambda = 2 \cdot a$ und die kleine Halbachse b .



Mittelpunktgleichung der $EL(b)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (38)$$

Parameterdarstellung (39)

$$x(t) = a \cdot \cos(t), \quad y(t) = b \cdot \sin(t),$$

$$\text{Parameter } t: 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi,$$

(siehe Konstruktion).

Lineare Exzentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$,
numerische Exzentrizität (Modul) ε :

$$\varepsilon = e/a, \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}. \quad (40)$$

1. Umfang $U_{ell} = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2(t)} dt, \quad t := \pi/2 - \varphi,$

$$\underline{U_{ell}} = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2(\varphi)} d\varphi = 4 \cdot a \cdot \mathbf{E}(\varepsilon) = \underline{2 \cdot \lambda \cdot \mathbf{E}(\varepsilon)}. \quad (41)$$

2. Fläche

$$\underline{A_{ell}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)) dt = 2 \cdot a \cdot b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \underline{\pi \cdot a \cdot b}. \quad (42)$$

3. Volumen des Ellipsoids (Rotation um die x-Achse)

$$\underline{V_{xell}} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^a y^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^a b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \underline{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot b^2 \cdot a}. \quad (43)$$

4. Oberfläche des Ellipsoids

$$O_{xell} = 4\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = 4\pi \cdot b \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2(t)} dt,$$

$$z := \varepsilon \cdot \cos(t), \quad O_{xell} = 4\pi \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \sqrt{1 - z^2} dz = \frac{4\pi \cdot b \cdot a}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[z \cdot \sqrt{1 - z^2} + \arcsin(z) \right]_0^{\varepsilon},$$

$$\underline{O_{xell}} = 2 \cdot \pi \cdot \left(b^2 + \frac{b \cdot a}{\varepsilon} \cdot \arcsin(\varepsilon) \right). \quad (44)$$

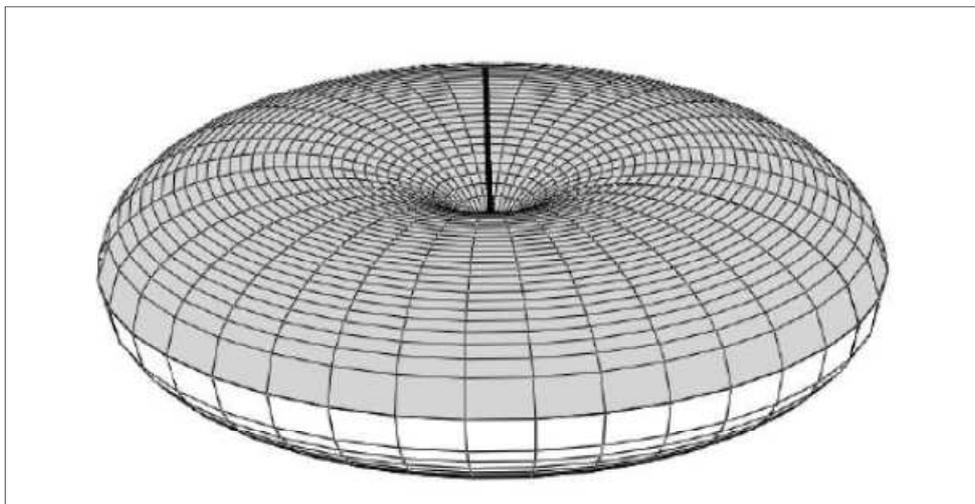
5. Volumen des „elliptischen Torus“ (Rotation um die y-Achse, linker Scheitel im Ursprung).

Anwendung der GULDINschen Regel, Flächenschwerpunkt $S(a,0)$.

$$\underline{V_{yell}} = 2 \cdot \pi \cdot x_s \cdot A_{ell} = \underline{2 \cdot \pi^2 \cdot a^2 \cdot b} \quad (45)$$

6. Oberfläche des „elliptischen Torus“ (Kurvenschwerpunkt $S(a,0)$!)

$$\underline{O_{yell}} = 2 \cdot \pi \cdot x_s \cdot U_{ell} = 8 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \mathbf{E}(\varepsilon) = \underline{2 \cdot \pi \cdot \lambda^2 \cdot \mathbf{E}(\varepsilon)}. \quad (46)$$



4.3. Maßgleiche Ellipsen und Eikurven

Den asymmetrischen Eikurven $Ek(n)$ stellen wir symmetrische Ellipsen $El(b)$ gegenüber, die in ausgewählten Maßzahlen, wie Flächeninhalt, Umfang oder Rotationsvolumen etc., mit ihnen übereinstimmen oder in bestimmten Maßverhältnissen zueinander stehen. Die Ellipse $El(b)$ habe stets den gleichen Durchmesser wie die zum Vergleich stehende $Ek(n)$: $2 \cdot a = \lambda$. $A(0,0)$, $B(\lambda,0)$ sind die Scheitel der gemeinsamen Hauptachse. Nachfolgend sei $n > 1$, denn für $n = 1$ sind beide Kurven identisch gleich dem Kreis mit dem Durchmesser λ .

Vorab ermitteln wir durch Gleichsetzen der Koordinaten $x(\varphi) = x(t)$, $y(\varphi)^2 = y(t)^2$ aus den Gleichungen (2) und (39) (*neuer Ursprung!*) den von A, B verschiedenen Kurvenschnittpunkt $S(x_s, y_s)$ der Kurven.

$$(*) \quad \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi) = \frac{\lambda}{2} \cos(t) + \frac{\lambda}{2} \quad , \quad (**) \quad \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi) \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) = b^2 \cdot (1 - \cos^2(t)).$$

Mit (*) wird $\cos(t)$ in (**) ersetzt, nach $\cos(\varphi)$ geordnet und durch $\cos^{n+1}(\varphi) \neq 0$ dividiert:

$$\underline{(\lambda^2 - 4 \cdot b^2) \cdot \cos^{n+1}(\varphi_s) - \lambda^2 \cdot \cos^{n-1}(\varphi_s) + 4 \cdot b^2 = 0} \quad , \quad x_s = x(\varphi_s), \quad y_s = y(\varphi_s) \quad (47)$$

Speziell lauten die Bestimmungsgleichungen nach Abspalten von $\cos(\varphi) - 1$ bzw. $\cos^2(\varphi) - 1$

$$(\lambda^2 - 4 \cdot b^2) \cdot \cos^2(\varphi_s) + (\lambda^2 - 4 \cdot b^2) \cdot \cos(\varphi_s) - 4 \cdot b^2 = 0 \quad \text{für } n = 2 \quad (47a)$$

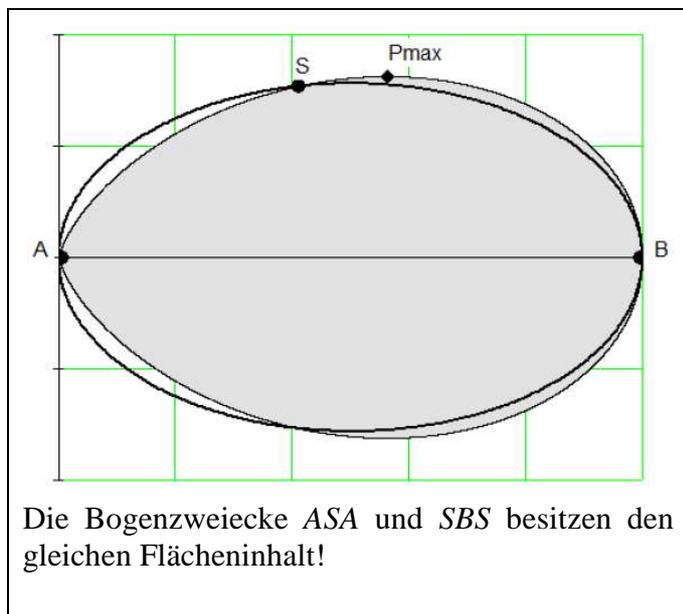
$$(\lambda^2 - 4 \cdot b^2) \cdot \cos^2(\varphi_s) - 4 \cdot b^2 = 0 \quad \text{für } n = 3 \quad (47b)$$

Wenden wir uns den maßgleichen Ellipsen zu.

Ohne Schwierigkeit finden wir aus (9), (42) die Halbachse b der zur $Ek(n)$ flächengleichen Ellipse $E(b)$.

$$A(n) = A_{ell}(b), \text{ falls } b(n) = \frac{(2 \cdot n - 1)!!}{(2 \cdot n)!!} \cdot \lambda \quad (48)$$

Für $n = 3$ sind die Maßzahlen neben der Grafik zusammengestellt, (für P_{max} siehe (11)).



Ellipse: $b = \frac{5}{16} \cdot \lambda$, $A_{ell} = \frac{5}{16} \cdot \pi \cdot \lambda^2$

Schnittpunkt $\cos(\varphi_s) = \frac{5}{\sqrt{39}}$, $\varphi_s \approx 36,8^\circ$

$$S\left(\frac{625 \cdot \lambda}{1521}, \frac{125\sqrt{14} \cdot \lambda}{1521}\right) \approx S(0,41\lambda, 0,31\lambda)$$

Eikurve $Ek(3)$: $A(3) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lambda^2$

Maximum $\cos(\varphi_{max}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_{max} = 30^\circ$

$$P_{max}\left(\frac{9 \cdot \lambda}{16}, \frac{9 \cdot \lambda}{16\sqrt{3}}\right) \approx P_{max}(0,56\lambda, 0,325\lambda)$$

Aus (21), (43) bzw. (22), (45) erhalten wir die kleinen Halbachsen b der zu den Rotationskörpern der $Ek(n)$ volumengleichen Ellipsoide bzw. „elliptischen Tori“.

$$V_x(n) = V_{xell}(b), \text{ falls } b = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot n + 1}} \cdot \lambda, \quad (49)$$

$$V_y(n) = V_{yell}(b), \text{ falls } b = \frac{(3 \cdot n)!!}{(3 \cdot n + 1)!!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{g(n)} \cdot \frac{4}{3} \lambda. \quad (50)$$

Bei der Ermittlung von b für oberflächengleiche Eikörper und Ellipsoide beschränken wir uns auf Beispiele, da (44) keine allgemeine Auflösung nach b erlaubt.

Für $n = 1$ entsteht die Kugel mit dem Radius $b = \lambda/2$. Für $n > 1$ folgt aus (27) und (44) unter Verwendung von (40) für ε die Bestimmungsgleichung

$$1 - \varepsilon^2 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{\arcsin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 2 \cdot P(n) \quad \text{mit} \quad O_x(n) = \pi \cdot \lambda^2 \cdot P(n) \quad \text{und} \quad b = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} \cdot \lambda.$$

Mit MATHCAD ergeben sich sehr genaue Näherungslösungen. Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse, wobei für $P(n)$ die exakten Werte aus (27a) verwendet wurden.

n	2	3	4
ε	0,6551496...	0,7767588...	0,8343900...
b/λ	0,3773154... $\approx 20/53$	0,3148990... $\approx 17/54$	0,2755872... $\approx 27/98$

Die Näherungsbrüche sind aus der Kettenbruchentwicklung der Dezimalbrüche gewonnen.

Schließlich vergleichen wir Ellipsen und Eikurven mit gleichem Modul $\varepsilon = k = \sqrt{1 - 1/n^2}$.

Die kleine Halbachse der Ellipse beträgt $b = \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \lambda$. (51)

Die Schnittpunktgleichung reduziert sich zu $(n^2 - 1) \cdot \cos^{n+1}(\varphi) - n^2 \cdot \cos^{n-1}(\varphi) + 1 = 0$. (47c)

Weiterhin ergeben sich z. B. folgende Größenverhältnisse:

$$\frac{A_{ell}(b)}{A(n)} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \quad \frac{V_{xell}(b)}{V_x(n)} = \frac{3n+1}{4 \cdot n^2}, \quad \frac{V_{yell}(b)}{V_y(n)} = \frac{3 \cdot (3n+1)!!}{8 \cdot n \cdot (3n)!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{g(n)}. \quad (52)$$

Speziell für $n = 3$ folgt $A_{ell} : A(3) = 8 : 15$, $V_{xell} : V_x(3) = 5 : 18$, $V_{yell} : V_y(3) = 32 : 63$.

Zwischen den Umfängen der $Ek(3)$ und der modulgleichen Ellipse $El(b)$, $b = \lambda/6$, besteht folgende Differenz mit $\varepsilon = k = \sqrt{8/9}$

$$U(3) - U_{ell}(\varepsilon) = 2\lambda \cdot \left[\mathbf{K}(\varepsilon) - \frac{7}{9} \cdot \mathbf{D}(\varepsilon) \right] - 2\lambda \cdot \mathbf{E}(\varepsilon) = \frac{\lambda}{4} \cdot [\mathbf{K}(\varepsilon) - \mathbf{E}(\varepsilon)] \approx 0,3537 \cdot \lambda. \quad (53)$$

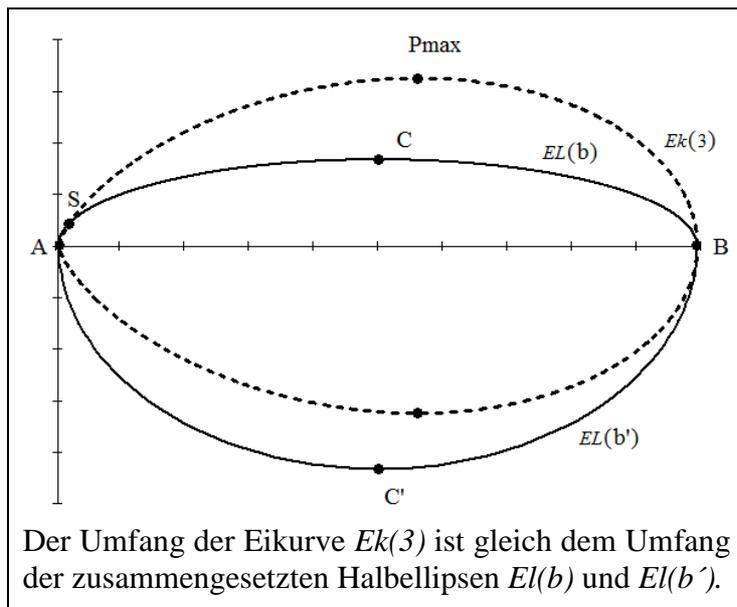
Das Längenverhältnis ist angenähert $U_{ell} : U(3) \approx 0.863 : 1 \approx 44 : 51$.

Mittels des komplementären Moduls $k' := \sqrt{1-k^2} = 1/3$ führen wir mit $\varepsilon' := \frac{1-k'}{1+k'} = 1/2$

eine „komplementäre“ Ellipse $El(b')$ mit der kleinen Halbachse $b' = \frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{1-\varepsilon'^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \lambda$ ein

und erhalten das anschauliche Ergebnis $U_{ell}(b) + U_{ell}(b') = 2 \cdot U(3)$. (54)

Der Umfang der Eikurve $Ek(3)$ ist das arithmetische Mittel der Umfänge der Ellipsen $El(b)$ und $El(b')$.



(55)

Maximum der Eikurve $Ek(3)$

$$P_{\max} \left(\frac{9}{16} \lambda, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{16} \lambda \right)$$

Nebenscheitel der Ellipsen

$$C \left(\frac{1}{2} \lambda, \frac{1}{6} \lambda \right), C' \left(\frac{1}{2} \lambda, \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda \right)$$

Schnittpunkt von $Ek(3)$ und $El(b)$

$$S \left(\frac{1}{64} \lambda, \frac{\sqrt{7}}{64} \lambda \right).$$

Die Schnittpunktkoordinaten ergeben sich aus (47c):

$$8 \cdot \cos^4(\varphi) - 9 \cdot \cos^2(\varphi) + 1 = (8 \cdot \cos^2(\varphi) - 1) \cdot (\cos^2(\varphi) - 1) = 0, \quad x_s = \cos(\varphi)^4.$$

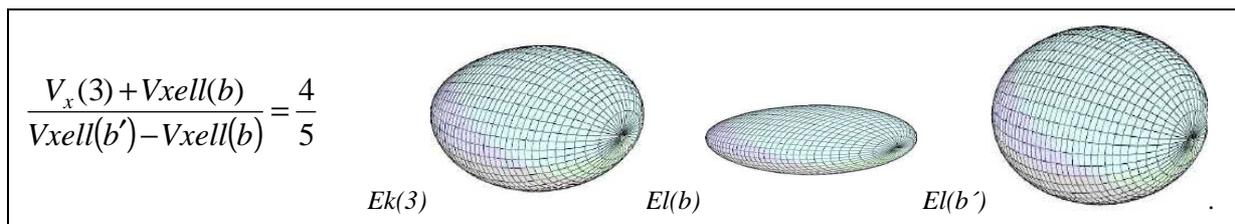
Zum Beweis von (54) führen wir zwei Transformationsformeln elliptischer Integrale an¹⁸:

$$\mathbf{K} \left(\frac{1-k'}{1+k'} \right) = \frac{1+k'}{2} \cdot \mathbf{K}(k), \quad \mathbf{E} \left(\frac{1-k'}{1+k'} \right) = \frac{1}{1+k'} \cdot [\mathbf{E}(k) + k' \cdot \mathbf{K}(k)], \quad k' := \sqrt{1-k^2}. \quad (\text{Ta,b})$$

Wir stellen (Tb) nach $\mathbf{K}(k)$ um und setzen in (53) ($k' = 1/3$) $\mathbf{K}(\varepsilon) = 4 \cdot \mathbf{E}(\varepsilon') - 3 \cdot \mathbf{E}(\varepsilon)$ ein:

$$U(3) - U_{ell}(\varepsilon) = \frac{2\lambda}{8} [\mathbf{K}(\varepsilon) - \mathbf{E}(\varepsilon)] = 2\lambda \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}(\varepsilon') - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}(\varepsilon) \right] = \frac{1}{2} \cdot U_{ell}(\varepsilon') - \frac{1}{2} \cdot U_{ell}(\varepsilon).$$

Abschließend sei für $n = 3$ eine leicht zu bestätigende Relation zwischen den Volumina des Eikörpers, des modulgleichen und des komplementären Ellipsoids angefügt.



¹⁸ Die schon auf GAUß und LANDEN zurückgehenden Transformationen werden im allgemeineren Rahmen im klassischen Werk von TRICOMI/KRAFFT: Elliptische Funktionen, Leipzig 1948 ausführlich behandelt. Formel (56a) wird auch bei FICHTENHOLZ (vgl. Fußnote 14) hergeleitet.

5. Eigenschaften der erweiterten Eikurven; zugeordnete Kurven

5.1. Kurvenverlauf der EK(n); singuläre Punkte, Tangenten und Normalen

Die Abschnitt 1. eingeführten verallgemeinerten Eikurven $EK(n)$ werden in diesem Abschnitt näher betrachtet. Die Gleichung (4)

$$F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^{n+1} - \lambda^2 \cdot x^{2n} = 0, \quad -\lambda \leq x \leq \lambda \quad (4a)$$

beschreibt eine algebraische Kurve der Ordnung $2n+2$, die für alle x mit $x^2 \leq \lambda^2$ reelle Punkte $P(x,y)$ besitzt. Sie ist symmetrisch zu den Achsen, weil x und y nur in gerader Potenz auftreten. Die Kurveneigenschaften lassen sich damit im Wesentlichen im ersten Quadranten ermitteln.

Für ungerades $n := 2 \cdot m - 1$ zerfällt die Gleichung in ein Produkt

$$F(x, y) \equiv \left[(x^2 + y^2)^m - \lambda \cdot x^{2m-1} \right] \cdot \left[(x^2 + y^2)^m + \lambda \cdot x^{2m-1} \right] \equiv F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0.$$

Der Faktor $F_1(x, y) = 0$ stellt für $x \geq 0$ die zugehörige $EK(n)$ dar und $F_2(x, y) \equiv F_1(-x, y) = 0$ liefert die an der y -Achse gespiegelte Kurve.

Der Ursprung ist ein singulären Punkt der $EK(n)$, denn $F(0,0) = 0, F_x(0,0) = 0, F_y(0,0) = 0$.

Bei rechtsseitiger bzw. linksseitiger Annäherung der Kurvenpunkte $P(x, y > 0)$ an $O(0,0)$ divergieren die Tangentenanstiege im entgegengesetzten Sinn.

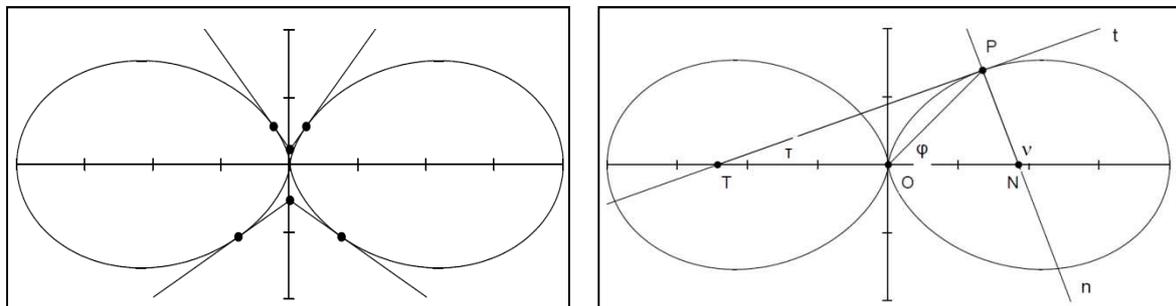
Denn aus der Parameterdarstellung der Gleichung (4)

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \quad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi), \quad r^2(\varphi) = \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi), \quad -\infty < \varphi < \infty \quad (4b)$$

folgt mit $2 \cdot r(\varphi) \cdot \dot{r}(\varphi) = -2 \cdot \lambda^2 \cdot n \cdot \cos^{2n-1}(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$ für $\varphi \neq \pm \pi/2$ der Tangentenanstieg

$$\tan(\tau) = y'(x) = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} \cdot \frac{r(\varphi)}{r(\varphi)} = \frac{r \cdot \dot{r} \cdot \sin(\varphi) + r^2 \cdot \cos(\varphi)}{r \cdot \dot{r} \cdot \cos(\varphi) - r^2 \cdot \sin(\varphi)} = \frac{1}{n+1} \cdot (n \cdot \tan(\varphi) - \cot(\varphi)), \quad (56)$$

d.h. für $\varphi \rightarrow \pi/2 \mp 0$ gilt $y'(x) \rightarrow \pm \infty$. Die y -Achse ist die Grenzlage der Tangenten und O ist ein Rückkehrpunkt (Spitze). Für $y < 0$ entsteht das Spiegelbild (O ist also Doppelspitze).



Die Gleichungen für die Tangente **t** und Normale **n** einer Kurve in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{t}: \quad \dot{x}(t) \cdot (y - y(t)) - \dot{y}(t) \cdot (x - x(t)) &= 0 \\ \mathbf{n}: \quad \dot{y}(t) \cdot (y - y(t)) + \dot{x}(t) \cdot (x - x(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

können für die regulären Punkte der $EK(n)$ ($\cos(\varphi) \neq 0$!) mit (4b) ausgeschrieben werden, wobei hier $t = \varphi$ der Richtungswinkel des Kurvenpunktes ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}: (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (y - r(\varphi) \cdot \sin \varphi) - (n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \cdot (x - r(\varphi) \cdot \cos \varphi) &= 0 \\ \mathbf{n}: (n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \cdot (y - r(\varphi) \cdot \sin \varphi) + (n+1) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (x - r(\varphi) \cdot \cos \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (58a)$$

Offenbar sind die Gleichungen aber auch für den singulären Punkt $\varphi = \pm \pi/2$ gültig.

Der in (56) und in (58a) auftretende Ausdruck $(n \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi))/(n+1)$ kann mittels eines Hilfswinkels dargestellt werden. Wir setzen $\cos^2(\varphi_0) := \frac{n}{n+1}$ und erhalten

$$\frac{n}{n+1} \sin^2(\varphi) - \frac{1}{n+1} \cos^2(\varphi) = \cos^2(\varphi_0) \cdot \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi_0) \cdot \cos^2(\varphi) = \sin(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Die Gleichungen (58) nehmen damit folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}: \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (y - y(\varphi)) - \sin(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \cdot (x - x(\varphi)) &= 0 \\ \mathbf{n}: \sin(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin(\varphi - \varphi_0) \cdot (y - y(\varphi)) + \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (x - x(\varphi)) &= 0 \end{aligned}, \quad \cos^2 \varphi_0 := \frac{n}{n+1}. \quad (58b)$$

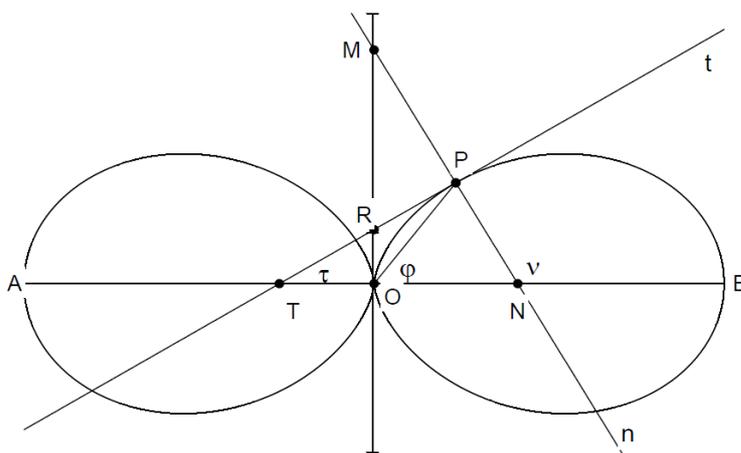
Der Winkel φ_0 ist durch n bis auf die Spiegelung an den Achsen festgelegt, φ_0 kann also in (58b) durch $k \cdot \pi \pm \varphi_0$ ersetzt werden.

Für $\varphi = \varphi_0$ ist \mathbf{t} eine Horizontaltangente $y = y(\varphi_0) = \text{const.}$, d.h. der Punkt $P(\varphi_0)$ ist ein Extrempunkt, (vgl. 3.2. (11)).

Schnittpunkte und -winkel von \mathbf{t} und \mathbf{n} mit den Achsen: (59)

$$EK(\mathbf{n}): \quad r^2(\varphi) = \lambda^2 \cdot \cos^{2n} \varphi \quad r(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi)} \geq 0$$

$$\text{Kurvenpunkt } P(x, y): \quad x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi.$$



Tangente $\mathbf{t}: T(x_T, 0), R(0, y_R)$

$$x_T = \frac{-r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}$$

$$y_R = \frac{r(\varphi)}{(n+1) \cdot \sin \varphi}$$

$$\tan \tau = \frac{n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{(n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \quad (\text{vgl. (56) !}).$$

Normale $\mathbf{n}: N(x_N, 0), M(0, y_M)$

$$x_N = \frac{n \cdot r(\varphi)}{(n+1) \cdot \cos \varphi}$$

$$y_M = \frac{n \cdot r(\varphi) \cdot \sin \varphi}{n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}$$

$$\tan \nu = -\frac{1}{\tan \tau}.$$

Winkel von \mathbf{t} und \mathbf{n} mit dem Radiusvektor $r(\varphi)$:

Winkel $\delta = \angle NPO$ und $\eta = \angle OPT$

$$\cot(\eta) = \tan(\delta) = n \cdot \tan(\varphi). \quad (60)$$

Das Vorzeichen entspricht dem Umlaufungssinn der Dreiecke.

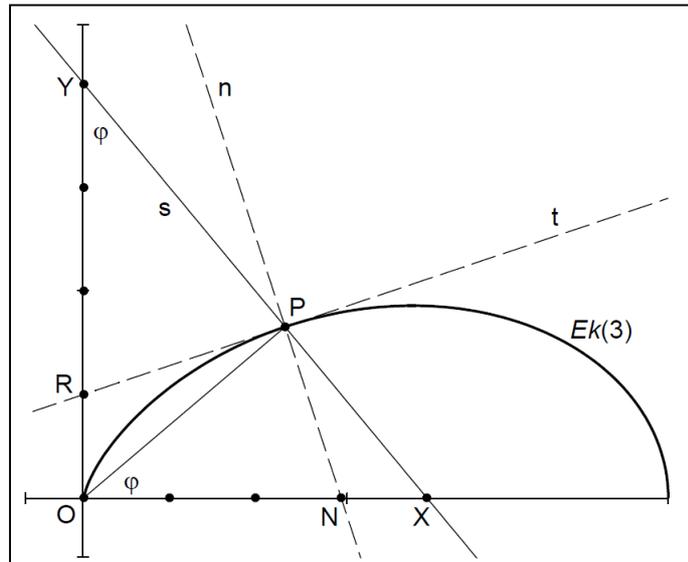
Die Formeln (59) ergeben sich unmittelbar aus (58a). Für die Herleitung der Formel (60) setzen wir $\delta := \nu - \varphi$ und formen $\tan(\nu - \varphi)$ mit Hilfe des Tangenssatzes um, wobei $\tan(\nu)$ mittels (59) und (56) auf $\tan(\varphi)$ zurückgeführt wird.

Beschränken wir uns auf den Kurvenverlauf im 1. Quadranten ($0 < \varphi < \pi/2$), so erhalten wir

aus $x_N = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{r(\varphi)}{\cos \varphi}$ und $y_R = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{r(\varphi)}{\sin \varphi}$ eine einfache Konstruktionsvorschrift für die Punkte N und R .

Konstruktion von \mathbf{t} und \mathbf{n} .

1. P auf der $Ek(n)$ ist gegeben.
2. Errichte in P die senkrechte Gerade s auf OP .
3. Die Schnittpunkte mit der x - bzw. y -Achse sind X und Y .
4. Teile OX und OY jeweils in $n+1$ gleichgroße Abschnitte.
5. N ist der benachbarte Teilpunkt von X .
 R ist der benachbarte Teilpunkt von O (auf der y -Achse).
6. \mathbf{t} geht durch P und R .
 \mathbf{n} geht durch P und N .



Es gilt $\overline{ON} = \frac{n}{n+1} \cdot \overline{OX} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\overline{OP}}{\cos \varphi} = x_N$ und $\overline{OR} = \frac{1}{n+1} \cdot \overline{OY} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\overline{OP}}{\sin \varphi} = y_R$.

Die Konstruktionsvorschrift ist durch Spiegelung auf die gesamte Kurve $Ek(n)$ übertragbar.

Wir führen an dieser Stelle noch einen (wiederholt auftretenden) Parameter \mathbf{p} ein:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(n, \varphi) := \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \quad . \quad (61)$$

Aus $r^2 = r^2(\varphi) := \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi)$ folgt $r^2 \cdot \mathbf{p}^2 = n^2 \cdot y(\varphi)^2 + x(\varphi)^2 = \cos^2(\varphi) \cdot (\dot{r}^2 + r^2)$.

Weiterhin erhalten wir zum Beispiel

$$\mathbf{p} = n \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \cos^2 \varphi} \quad \text{mit} \quad k^2 = 1 - \frac{1}{n^2} \quad , \quad (\text{siehe u. a. Abschnitt 3.1.}) \quad ,$$

$$\mathbf{p}^2 = (\cos^2 \varphi - n \cdot \sin^2 \varphi)^2 + (n+1)^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \quad ,$$

$$\cos(\tau) \cdot \mathbf{p} = (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad , \quad \cos(\nu) \cdot \mathbf{p} = \cos^2 \varphi - n \cdot \sin^2 \varphi \quad ,$$

$$\cos(\delta) \cdot \mathbf{p} = \cos(\varphi) \quad , \quad \sin(\delta) \cdot \mathbf{p} = n \cdot \sin(\varphi) \quad .$$

Für den Kreis $Ek(1)$ ist $\mathbf{p} = 1$, $x_N = \lambda/2$, so dass sich die bekannten Aussagen ergeben:

$$\cos(\tau) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin(2\varphi) \quad , \quad \cos(\nu) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos(2\varphi) \quad , \quad \cos(\delta) = \cos(\varphi) \quad ,$$

d.h. $\tau + \pi/2 = \nu = 2 \cdot \varphi$ und $\delta = \varphi$.

5.2. Fußpunktkurven der Eikurven

Fällen wir von einem festen Punkt $Po(xo, yo)$ auf alle Tangenten einer Kurve die Lote, so heißt der geometrische Ort der Fußpunkte die *Fußpunktkurve* der betreffenden Kurve mit dem *Pol* Po .

Die Fußpunktkurven der $EK(n)$ bzw. $Ek(n)$ bezeichnen wir mit $FK(n, xo, yo)$ bzw. $Fk(n, xo, yo)$. Ist die Eikurve durch $r(\varphi)^2 = \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi)$ gegeben, so wird dem Punkt $P(\varphi) \in EK(n)$ der Punkt $\bar{P}(\varphi) \in FK(n, xo, yo)$ zugeordnet. Man beachte, dass φ nicht der Richtungswinkel von \bar{P} sondern von P ist!

Die durch Po gehende Parallele zur Normalen von P schneidet dessen Tangente im Fußpunkt \bar{P} . Also folgen die Parametergleichungen $\bar{x} = \bar{x}(\varphi)$, $\bar{y} = \bar{y}(\varphi)$ aus den System (vgl. 58a)

$$\begin{cases} (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (\bar{y} - r(\varphi) \cdot \sin \varphi) - (n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \cdot (\bar{x} - r(\varphi) \cdot \cos \varphi) = 0 \\ (n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \cdot (\bar{y} - yo) + (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (\bar{x} - xo) = 0 \end{cases} \quad (62)$$

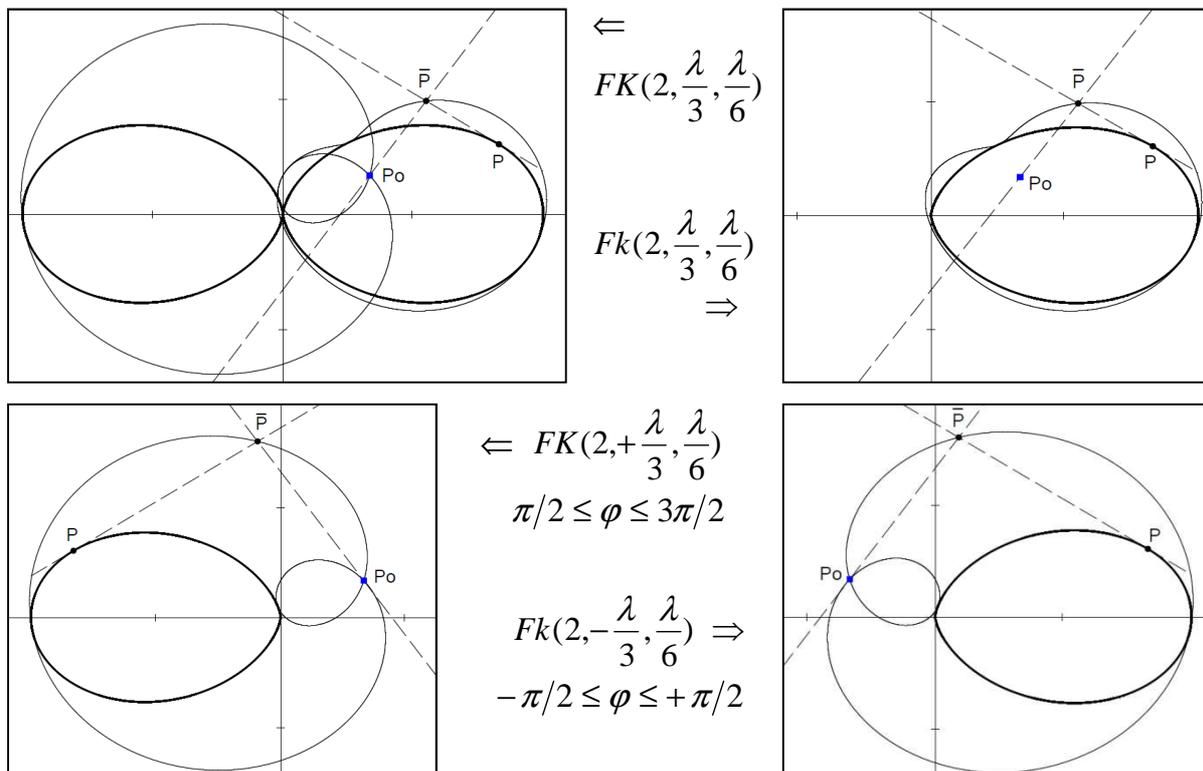
Mit den Abkürzungen und Vereinfachungen

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &:= (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, & \mathbf{c} &:= n \cdot \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi, \\ \sin(\varphi) \cdot \mathbf{s} - \cos(\varphi) \cdot \mathbf{c} &= \cos \varphi, & \cos(\varphi) \cdot \mathbf{s} + \sin(\varphi) \cdot \mathbf{c} &= n \cdot \sin \varphi, \\ \mathbf{p} &= \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \sqrt{\mathbf{s}^2 + \mathbf{c}^2} & \text{und} & \quad r(\varphi) = \sqrt{\lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi)} \end{aligned} \quad (63a)$$

gelten die Parametergleichungen für den Punkt $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ der $FK(n, xo, yo)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\varphi) \cdot \mathbf{p}^2 &= \mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \cdot xo + \mathbf{c} \cdot yo) - \mathbf{c} \cdot r(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ \bar{y}(\varphi) \cdot \mathbf{p}^2 &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{s} \cdot xo + \mathbf{c} \cdot yo) + \mathbf{s} \cdot r(\varphi) \cdot \cos \varphi \end{aligned}, \quad (-\infty < \varphi < \infty). \quad (63b)$$

Nachfolgend die typischen Bilder einer Fußpunktkurve für die $EK(2)$ bzw. $Ek(2)$ und $\lambda = 2$:



Wir erkennen einige Eigenschaften der Fußpunktkurven, die aus der Konstruktion und den Eigenschaften der Eikurven folgen.

- (1) Die $FK(n,xo,yo)$ ist eine geschlossene Kurve mit $\bar{P}(\varphi + 2\pi) = \bar{P}(\varphi)$.
- (2) Auch die $Fk(n,xo,yo)$ ist geschlossen und wird für $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ einmal durchlaufen.
- (3) Die $Ek(n)$ liegt im Inneren der $Fk(n,xo,yo)$.
- (4) $P(\lambda,0) \rightarrow \bar{P}(\lambda, yo)$, $P(0,0) \rightarrow \bar{P}(0, yo)$, $P(x_{\max}, y_{\max}) \rightarrow \bar{P}(xo, y_{\max})$.
- (5) Ist \bar{P} ein Berührungspunkt, d.h. $\bar{P}(\varphi) = P(\varphi)$, so liegt Po auf der Normalen \mathbf{n} von P .
- (6) Die $FK(n,xo,yo)$ für $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ ist die Spiegelung der $Fk(n,-xo,yo)$ an der y-Achse: $\bar{P}(\varphi, -xo, yo) \rightarrow \bar{P}(\pi - \varphi, xo, yo)$. Dabei wird die FK mit wachsendem Winkel $(\pi - \varphi)$ durchlaufen, wenn die Fk entgegengesetzt von $\varphi = \pi/2$ bis $\varphi = -\pi/2$ umlaufen wird.

Zum Beispiel gilt (3), weil die Tangenten (der geschlossenen konvexen) $Ek(n)$ nicht durch das Innere der $Ek(n)$ verlaufen. (4) folgt aus den speziellen Tangentenlagen und (6) wird durch (63b) bestätigt, denn $\bar{x}(\pi - \varphi, xo, yo) = -\bar{x}(\varphi, -xo, yo)$ und $\bar{y}(\pi - \varphi, xo, yo) = \bar{y}(\varphi, -xo, yo)$. Wegen (6) können wir uns vorrangig auf die Untersuchung der $FK(n,xo,yo)$ beschränken.

- (7) Liegt Po außerhalb der $Ek(n)$, so ist er ein Doppelpunkt der $Fk(n,xo,yo)$, da von Po aus zwei (verschiedenen) Tangenten an die $Ek(n)$ gelegt werden können und er sein eigener Fußpunkt ist. Sind P_1, P_2 die Kurvenpunkte der Tangenten, d.h. ist $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = Po$, und bewegt sich ein Punkt P (auf kurzem Wege) längs der $Ek(n)$ von P_1 nach P_2 , so vollzieht \bar{P} auf der $Fk(n)$ eine Schleifenbewegung von Po nach Po .
- (8) Es existiert ein Zwischenpunkt P von P_1, P_2 , dessen Normale durch Po geht, d.h. die Schleife berührt die $Ek(n)$.
- (9) Im Grenzfall $Po \in Ek(n)$ wird Po zum Rückkehrpunkt. (Liegt Po jedoch im Inneren der $Ek(n)$, so ist er natürlich kein Punkt der $Fk(n,xo,yo)$).

(5a) Ist $P(\varphi) = \bar{P}(\varphi) \in Ek(n)$ ein Berührungspunkt, so liegen die Pole $Po(\varphi)$ aller den Punkt berührenden $Fk(n, xo(\varphi), yo(\varphi))$ auf der Normalen \mathbf{n} von $P(\varphi)$. Die Normalengleichung (58a) wird für festen Winkel φ zu einer Geradengleichung der Pole:

$$Po(\varphi): \quad \mathbf{c}(\varphi) \cdot yo + \mathbf{s}(\varphi) \cdot xo = \mathbf{c}(\varphi) \cdot r(\varphi) \cdot \sin \varphi + \mathbf{s}(\varphi) \cdot r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = n \cdot r(\varphi) \cdot \sin \varphi. \quad (64)$$

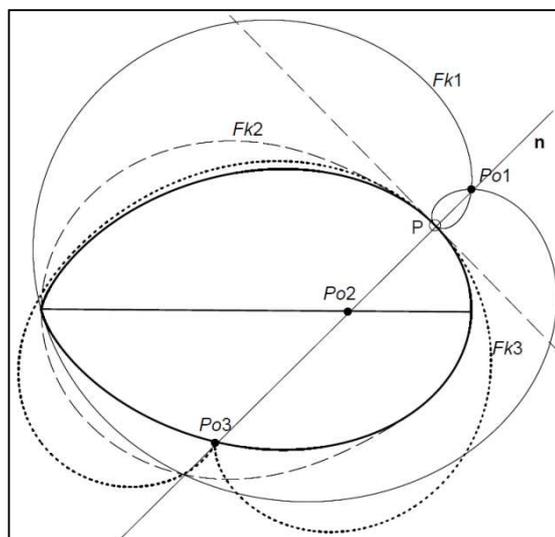
Die Grafik illustriert an der $Ek(3)$ den Fall $\lambda = 1$, $\varphi = 12^\circ$, $P(\varphi) \approx P(0.915, 0.195)$ mit der Normalengleichung (64a)

$$(3 - 4 \cos^2 \varphi) \cdot yo = (3 \cos^2 \varphi - 4 xo) \cdot \sin \varphi \cos \varphi$$

$$yo \approx 0.9833 \cdot xo - 0.7056$$

und (angenähert) den Polen $Po1(1, 0.28)$, $Po2(0.72, 0)$ und $Po3(0.41, -0.31) \in Ek(3)$.

Die $Fk3$ hat zwei Berührungspunkte. Die $Fk2$ hat nach (4) die Berührungspunkten $P(0,0)$, $P(1,0)$ und ist symmetrisch zur x-Achse, hat also offenbar vier Berührungen. Und die $Fk1$?



Wir untersuchen die Lage der Berührungspunkte genauer und stellen dafür eine allgemeine Bedingungsgleichung auf. In (63b) wird $\bar{x}(\varphi) = x(\varphi) = \lambda \cdot \cos(\varphi)^{n+1}$ gesetzt, anschließend die erste Gleichung mit \mathbf{s} und die zweite Gleichung mit \mathbf{c} multipliziert. Nach Addition der beiden Gleichungen und Vereinfachungen mittels (63a) erhalten wir die Bedingung

$$n \cdot y(\varphi) = \mathbf{s} \cdot x_0 + \mathbf{c} \cdot y_0, \tag{65a}$$

aus der bezüglich des Pols $Po(x_0, y_0)$ die Richtungswinkel $\varphi = \varphi_B$ der Berührungspunkte $P(\varphi_B)$ von $Ek(n)$ und $Fk(n, x_0, y_0)$ ermittelt werden können.

Wird in (65a) der Sinus durch den Cosinus ersetzt, so entsteht eine algebraische Gleichung vom Grad $2n+2$ für $z := \cos(\varphi_B) \geq 0$:

$$\left[n^2 \lambda^2 \cdot z^{2n} - 2n(n+1) \cdot \lambda \cdot x_0 \cdot z^{n+1} + (n+1)^2 (x_0^2 + y_0^2) \cdot z^2 - n^2 y_0^2 \right] \cdot (1-z^2) = y_0^2 z^2. \tag{65b}$$

Die relevanten Lösungen $0 \leq z \leq 1$, $\varphi_B = \pm \arccos(z)$ sind mit (65a) zu überprüfen.

Es gibt nicht mehr als vier Berührungspunkte!

Denn die Analyse der Koeffizienten in der nach Potenzen von z geordneten Gleichung (65b) ergibt maximal vier Vorzeichenwechsel und nach der Regel von DESCARTES auch höchstens vier positive Wurzeln.

Für das Beispiel $Ek(3)$, $\lambda = 1$ erhalten wir die Bedingungsgleichung vierten Grades für z^2

$$9z^8 - (9 + 24x_0)z^6 + (16x_0^2 + 24x_0 + 16y_0^2)z^4 - (16x_0^2 + 24y_0^2)z^2 + 9y_0^2 = 0. \tag{66}$$

Der vorgegebene Berührungswinkel ist $\varphi_B = 12^\circ$. Aus der Normalengleichung (64a) ergeben sich die Koordinaten der Pole (numerisch ermittelt):

$Po1$: $x_0 := 1$, $y_0 := (3\cos^2 \phi - 4) \cdot (3 - 4\cos^2 \phi)^{-1} \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \approx 0,27777$.

$Po2$: $x_0 := 3/4 \cdot \cos^2 \phi \approx 0,71758$, $y_0 := 0$.

$Po3$: Schnittpunkt der Geraden (64a) mit der $Ek(3)$: $(x_0^2 + y_0^2)^2 = x_0^3$
 $x_0 \approx 0,406067$, $y_0 \approx -0,306381$, $\varphi_B = \arctan(y_0/x_0) = -37,0347..^\circ \approx -37^\circ$.

Für diese Pole erhalten wir aus (66) folgende Berührungspunkte (vgl. Grafik S.22):

	Fk1		Fk2				Fk3	
z^2	0,9567..	0,043029..	0,956774...	0	1	0,9567...	0,637236..	
φ_B	12°	$-78,0278^\circ$ ($\neq -78^\circ$)	12°	-12°	90°	0°	12°	$-37,0347^\circ$ ($\neq -37^\circ$)
$\bar{x}(\varphi_B) = x(\varphi_B)$	0,9154	0,00185	0,9154	0,9154	0	1	0,9154	0,40606..
$\bar{y}(\varphi_B) = y(\varphi_B)$	0,1945	-0,00873	0,1945	-0,1945	0	0	0,1945	-0,30638

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung einiger zur x -Achse symmetrischen Fußpunktkurven mit dem Pol $Po(x_0, 0)$.¹⁹

¹⁹ Eine allgemeine Behandlung der Fußpunktkurven und speziell der Kegelschnitte findet man bei WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven (Fußnote 1).

Die Parametergleichungen (63b) vereinfachen sich für die Fußpunktkurven $Fk(n, x_0, 0)$:

$$\bar{x}(\varphi) \cdot \mathbf{p}^2 = \mathbf{s}^2 \cdot x_0 - \mathbf{c} \cdot x(\varphi), \quad \bar{y}(\varphi) \cdot \mathbf{p}^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{s} \cdot x_0 + \mathbf{s} \cdot x(\varphi). \quad (63c)$$

Offensichtlich gilt die Achsensymmetrie $y(-\varphi) = y(\varphi)$, $x(-\varphi) = x(\varphi)$.

Auch die Bedingungsgleichung (65b) für die Berührungspunkte von $Fk(n, x_0, 0)$ und $Ek(n)$ hat eine einfachere Form:

$$\left[n \cdot \lambda \cdot z^{n-1} - (n+1) \cdot x_0 \right]^2 \cdot z^2 \cdot (1 - z^2) = 0, \quad 1 \geq z = \cos(\varphi_B) \geq 0. \quad (65c)$$

Mit $x_B = \lambda \cdot z^{n+1}$ erhalten wir die x -Koordinaten der Berührungspunkte

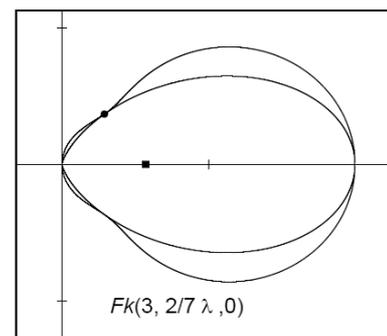
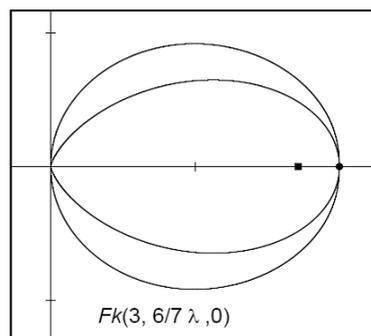
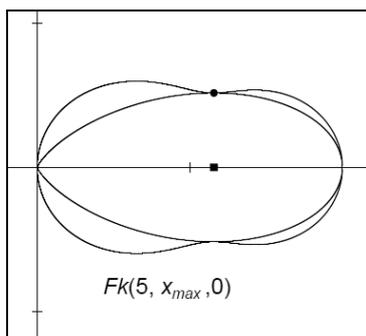
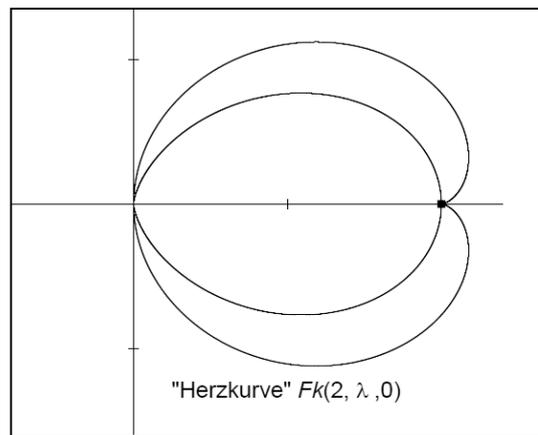
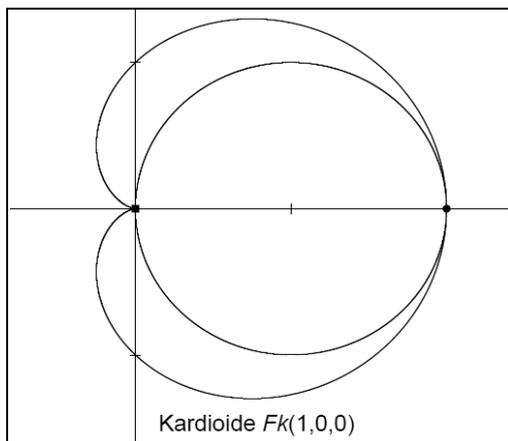
$$x_{B1} = 0, \quad x_{B2} = \lambda \quad \text{und} \quad x_{B3, B4} = \lambda \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{x_0}{\lambda} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \quad \text{falls } n > 1, \quad 0 < x_0 < \frac{n}{n+1} \cdot \lambda.$$

Für $n=1$, $x_0 = \lambda/2$ sind nach (65c) alle Punkte Berührungspunkte: $Fk(1, \lambda/2, 0) = Ek(1)$.

Für alle n gilt $x_0 := x_{\max} = \lambda \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} = x_{B3, B4}$ mit den horizontalen Berührungstangenten.

Im einfachen Fall $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = \lambda$ entstehen herzförmige Fußpunktkurven.

Die $Fk(1, 0, 0)$ ist die bekannte Kardioide. Denn aus der Parameterdarstellung (63c) folgen die Gleichungen $\bar{x}(2\varphi) \cdot 1 = \cos(2\varphi) \cdot \lambda \cdot \frac{\cos(2\varphi)+1}{2}$, $\bar{y}(2\varphi) \cdot 1 = \sin(2\varphi) \cdot \lambda \cdot \frac{\cos(2\varphi)+1}{2}$ und mit dem Normalenwinkel $\nu = 2\varphi$ als Richtungswinkel die Polarform $2 \cdot \bar{r}(\nu) = \lambda \cdot (\cos \nu + 1)$.

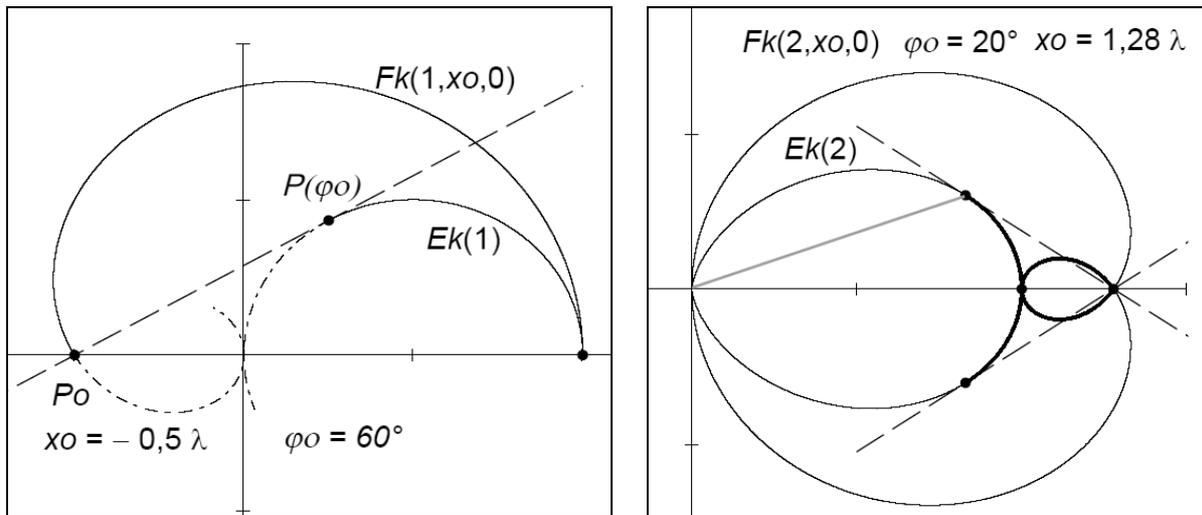


Liegt x_0 außerhalb der Eikurve, so vollzieht die Fußpunktkurve wie in der Eigenschaft (7) erwähnt eine Schleife, die durch $P_0(x_0,0)$ führt. Die Tangente von $x_0 = x_T$ an die $Ek(n)$ berühre die Eikurve im Punkt $P(\varphi_0)$. Dann folgt aus (59) die Beziehung $x_0 = -x(\varphi_0)/c(\varphi_0)$ oder umgeformt

$$\lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi_0) = (n+1) \cdot \cos^2(\varphi_0) \cdot x_0 - n \cdot x_0 \quad (67)$$

Zum Beispiel folgt für $n=1$, $x_0 := -1/2 \cdot \lambda$ aus (67) $\cos^2 \varphi_0 = x_0 / (2 \cdot x_0 - \lambda) = 1/4$. Und für $n=2$, $\varphi_0 := 20^\circ$ gilt $x_0 = \lambda \cdot \cos^3 \varphi_0 / (3 \cdot \cos^2 \varphi_0 - 2) \approx 1,2784 \cdot \lambda$.

Im Punkt $P_0(x_0,0) = \bar{P}(\varphi_0) \leftarrow P(\varphi_0)$ ist der Übergang von der „Hauptkurve“ zur Schleife.



5.3. Flächeninhalte spezieller Fußpunktkurven

Bewegt sich der Punkt $\bar{P}(\varphi)$ auf der $Fk(n, x_0, 0)$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=\phi$, so überstreicht der Radiusvektor \overline{OP} eine Fläche mit dem Flächeninhalt

$$A_{fk}(n, x_0, \phi) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\phi [\bar{x}(\varphi) \cdot \dot{\bar{y}}(\varphi) - \dot{\bar{x}}(\varphi) \cdot \bar{y}(\varphi)] d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\phi J(n, x_0) d\varphi \quad (68)$$

Wir formen den Integranden $J(n, x_0)$ unter Verwendung von (63c) und den Abkürzungen (63a) um und erhalten schließlich die Darstellung

$$J(n, x_0) = \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{p}^4} \cdot x^2(\varphi) + \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{p}^4} \cdot \mathbf{s}^2 \cdot x_0^2 - \frac{\dot{\mathbf{s}} \cdot x(\varphi) - \mathbf{s} \cdot \dot{x}(\varphi)}{\mathbf{p}^2} \cdot x_0$$

bzw. unter Verwendung von $\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{p}^2 + n$ und nach dem Ersetzen der Abkürzungen

$$J(n, x_0) = \lambda^2 \cdot J1(n) + (n+1)^2 \cdot x_0^2 \cdot J2(n) - (n+1) \cdot \lambda \cdot x_0 \cdot J3(n) \quad (69)$$

$$\left| \begin{array}{l} J1(n) = \frac{\mathbf{p}^2 + n}{\mathbf{p}^4} \cdot \cos^{2n+2} \varphi, \quad (\mathbf{p}^2 = n^2 \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi), \\ J2(n) = \frac{\mathbf{p}^2 + n}{\mathbf{p}^4} \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi, \quad J3(n) = \frac{n \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\mathbf{p}^2} \cdot \cos^{n+1} \varphi. \end{array} \right.$$

Die allgemeine (aber elementare) Auswertung der Integrale ist sehr umständlich und selbst für $\phi = \pi/2$ nicht übersichtlich. Für konkrete Beispiele bieten sich dann CAS-Programme an. Wir untersuchen einige Spezialfälle näher.

1. Die Fußpunktkurven $Fk(1, x_0, 0)$ des Kreises $Ek(1)$.

Für $n = 1$ können wir die Integrale in der Formel

$$A_{fk}(1, x_0, \phi) = \lambda^2 \cdot \int_0^\phi \cos^4 \varphi \, d\varphi + 4 \cdot x_0^2 \cdot \int_0^\phi \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi - x_0 \cdot \lambda \cdot \int_0^\phi \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

durch die Verdoppelung der Argumente leicht lösen oder direkt aus Integraltafeln entnehmen.

Geordnet erhalten wir

$$A_{fk}(1, x_0, \phi) = \left(\frac{3 \cdot \lambda^2}{8} - \frac{x_0 \cdot (\lambda - x_0)}{2} \right) \cdot \phi + \frac{\lambda \cdot (\lambda - x_0)}{4} \cdot \sin(2\phi) + \frac{\lambda^2 - 4 \cdot x_0^2}{32} \cdot \sin(4\phi). \quad (70)$$

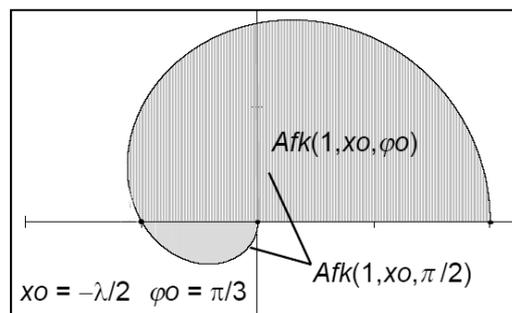
Der Integrationsweg wird so durchlaufen, dass die Fläche stets auf der gleichen Seite liegt. Damit „überlagern“ sich Grund- und Schleifenfläche und deren Inhalte addieren sich!

Wir wenden zur Demonstration die Formel auf das Beispiel aus Seite 25 an und berechnen die Flächen sowohl ohne als auch mit Schleifenanteil, d.h. für $\phi = \varphi_0 = \pi/3$ bzw. $\phi = \pi/2$.

$$A_{fk}\left(1, \frac{-\lambda}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \lambda^2 + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \lambda^2 \approx 1,110 \cdot \lambda^2$$

$$A_{fk}\left(1, \frac{-\lambda}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \lambda^2 \approx 1,178 \cdot \lambda^2$$

→ Die Gesamtfläche dieser Fußpunktkurve ist das Dreifache der Fläche des Kreises $Ek(1)$.



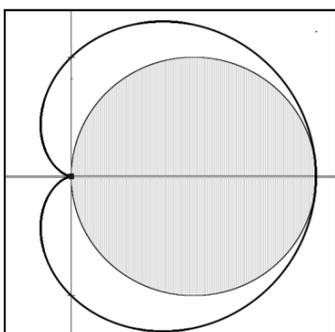
Es gilt für die Gesamtfläche $2A_{fk}\left(1, x_0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{3 \cdot \lambda^2}{8} - \frac{x_0 \cdot (\lambda - x_0)}{2} \right) \cdot \pi = 2A_{fk}\left(1, \lambda - x_0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$Fk(1, x_0, 0)$ und $Fk(1, \lambda - x_0, 0)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $x = \lambda/2$.

Für die Kardioide $Fk(1, 0, 0)$ finden wir folgende Flächenbeziehungen.

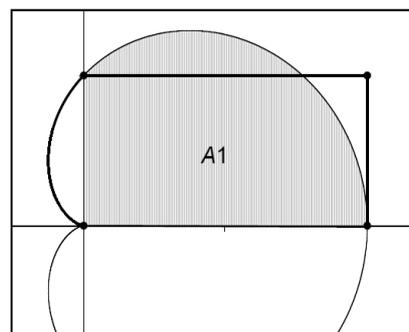
$$A_{Kard} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2 = \frac{3}{2} \cdot A_{Kreis}$$

→ Der Kreis bedeckt 2/3 der Kardioide.



$$A_1 := A_{fk}(1, 0, \pi/4) = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2$$

→ Markierte Fläche $A_1 =$ umrandete Fläche.



2. Die „herzförmigen“ Fußpunktkurven $Fk(n, 0, 0)$ der $Ek(n)$ für $n > 1$.

Mit der Variablensubstitution $t := \tan(\varphi)$, $dt = (1+t^2) \cdot d\varphi$ erhalten wir

$$A_{Fk}(n, 0, \phi) = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \int_0^\phi J1(n) d\varphi = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \int_0^{\tan(\phi)} \frac{(1+n^2 t^2) + n \cdot (1+t^2)}{(1+n^2 t^2)^2 \cdot (1+t^2)^{n+1}} dt$$

und mittels Partialbruchzerlegung (siehe unten!)

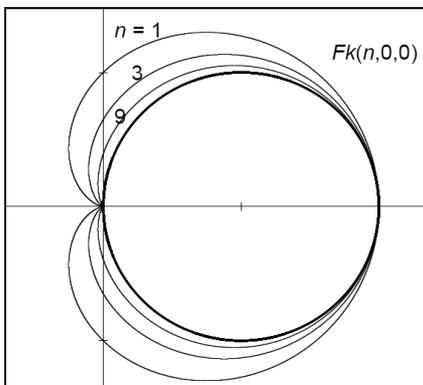
$$A_{Fk}(n, 0, \phi) = \frac{\lambda^2}{2} \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \left[\int_0^{\tan \phi} \frac{n}{(1+n^2 t^2)^2} dt - \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (n^2-1)^{k-1}}{n^{2k+1}} \int_0^{\tan \phi} \frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}} \right] \quad (71)$$

und speziell für $\phi = \pi/2$ (siehe unten!)

$$A_{Fk}(n, 0, \frac{\pi}{2}) = \frac{\lambda^2}{2} \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (n^2-1)^{k-1}}{n^{2k+1}} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right] \cdot \frac{\pi}{2} \quad (72)$$

Die Tabelle enthält die Flächeninhalte $A_{Fk}(n) = 2 \cdot A_{Fk}(n, 0, \frac{\pi}{2})$ einiger $Fk(n, 0, 0)$:

$n =$	1	2	3	4	5
$A_{Fk}(n) =$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2$	$\frac{47}{36} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2$	$\frac{313}{256} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2$	$\frac{47043}{40000} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2$	$\frac{71293}{62208} \cdot \frac{\pi}{4} \lambda^2$



- Der Kreis $Ek(1)$ liegt vollständig in dem Inneren aller $Fk(n, 0, 0)$.
- Der Flächeninhalt des Kreises $Ek(1)$ ist eine untere Schranke der Flächeninhalte $A_{Fk}(n)$.
- Die $Ek(1)$ ist die Grenzkurve der $Fk(n, 0, 0)$ für $n \rightarrow \infty$.
- $A_{Fk}(n) > A_{Fk}(n+1) \rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \lambda^2$ für $n \rightarrow \infty$. (73)

Die augenscheinlich evidenten Aussagen werden nachfolgend begründet, (siehe dazu die Formeln (11), (63) und die Eigenschaft (4), S.22):

Aus (63) folgt $\bar{y}^2 + \bar{x}^2 = x(\varphi)^2 \cdot (\mathbf{s}^2 + \mathbf{c}^2) / \mathbf{p}^4 = x^2 / \mathbf{p}^2$. Weiterhin sind genau dann $\mathbf{c} \geq 0$ und $\lambda \geq \bar{x}(\varphi) \geq 0$, wenn $0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max} = \arctan(1/\sqrt{n})$.

Für alle $\bar{x}(\varphi) \geq 0$ ist demnach die Differenz der Ordinatenquadrate der $Fk(n, 0, 0)$ und $Ek(1)$

$$\bar{y}^2 - y(\bar{x})^2 = \left(\frac{x^2}{\mathbf{p}^2} - \bar{x}^2 \right) - (\lambda \cdot \bar{x} - \bar{x}^2) = \frac{x^2}{\mathbf{p}^2} + \lambda \cdot \frac{\mathbf{c} \cdot x}{\mathbf{p}^2} \geq 0$$

und mit wachsendem n konvergiert

die Differenz mit $x(\varphi) = \lambda \cdot (\cos \varphi)^{n+1}$ punktweise gegen Null. Für $\bar{x}(\varphi) < 0$ geht auch der Abstand $\bar{P}O$ aller Punkte $\bar{P}(\bar{x} < 0)$ wegen $\bar{y}^2 + \bar{x}^2 < x^2 / (n^2 \cdot \sin^2 \varphi_{\max} + 0) = x^2 \cdot (n+1) / n^2$ gegen Null, d.h. die $Ek(1)$ ist Grenzkurve. Es verbleibt der Nachweis von (73).

Wir fügen hier die Herleitungen der Formeln (71) – (73) ein.

Der Bruch $B(a,n,m) := \frac{1}{(1+t^2)^n \cdot (1+a^2t^2)^m}$, $a > 1, n > 1, m \geq 0$ erfüllt offensichtlich die

$$\text{Zerlegungsformel } (a^2 - 1) \cdot B(a, n + 1, m) = a^2 \cdot B(a, n, m) - B(a, n + 1, m - 1). \quad (74a)$$

Mittels (74a) und vollständiger Induktion nach n ergeben sich folgende Summendarstellungen

$$B(a, n, 1) = \frac{a^{2n}}{(a^2 - 1)^n} \cdot \frac{1}{1 + a^2t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{a^{2k-2}}{(a^2 - 1)^k} \cdot \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1-k}}, \quad (74b)$$

$$B(a, n, 2) = \frac{a^{2n}}{(a^2 - 1)^n} \cdot \frac{1}{(1 + a^2t^2)^2} - \frac{n \cdot a^{2n}}{(a^2 - 1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 + a^2t^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot a^{2k-2}}{(a^2 - 1)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1-k}}. \quad (74c)$$

Ersetzen wir in $Afk(n, 0, \phi)$ die Brüche des Integranden $JI(n) = B(n, n + 1, 1) + n \cdot B(n, n, 2)$ durch die Summen aus (74b,c), so entsteht nach einigen Umformungen die Formel (71).

Zur Berechnung der Integrale verwenden wir die mittels partieller Integration gewonnene Reduktionsformel²⁰

$$\int_0^\infty \frac{a}{(1 + a^2t^2)^{k+1}} dt = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^{k+1}} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^k} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} + \frac{2k-1}{2k} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^k}$$

und durch wiederholte Anwendung $\int_0^\infty \frac{a}{(1 + a^2 \cdot t^2)^{k+1}} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \arctan(t) \Big|_0^\infty = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

In (71) eingesetzt folgt (72).

Zum Beweis von (73) stellen wir einige Abkürzungen und Abschätzungen bereit:

$$q(n) := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad p(x, k) := \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^k \cdot \frac{1}{x^3}, \quad P(k) := \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \leq \frac{1}{2}.$$

Mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert $q(n) \rightarrow e^{-1} \cdot e^{+1} = 1$ und aus dem Vergleich von geometrischem und arithmetischem Mittel folgt (für $n+1$ Faktoren)

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot q(n)} < \frac{1 + n \cdot (1 - 1/n^2)}{n+1} = 1 - \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \sqrt[n+1]{q(n+1)}, \text{ d.h. } q(n) < q(n+1).$$

Für $x > 1$ und $2 \cdot k \leq 3 \cdot (x^2 - 1)$ ist die Ableitung $p'(x, k) < 0$, d.h. $p(x, k)$ ist monoton fallend.

Wir erhalten die Abschätzung $Afk(n, 0, \pi/2) - Afk(n+1, 0, \pi/2) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda^2 \cdot \pi}{4} \cdot \left[q(n)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n k \cdot p(n, k) \cdot P(k) \right) - q(n+1)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot p(n+1, k) \cdot P(k) \right) \right] \\ &> \frac{\lambda^2 \cdot \pi}{4} \cdot \left[q(n)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n k \cdot p(n+1, k) \cdot P(k) \right) - q(n)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot p(n+1, k) \cdot P(k) \right) \right] \\ &> \frac{\lambda^2 \cdot \pi}{4} \cdot q(n)^{-1} \cdot (n+1) \cdot p(n+1, n+1) \cdot P(n+1) > 0. \end{aligned}$$

²⁰ Siehe z.B. FICHTENHOLZ Nr.271 (→ Fußnote 14)

$$A_{Fk}(n+1) < A_{Fk}(n) - \lambda^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1} \cdot \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < A_{Fk}(n) \quad (73a)$$

Mit $s(n) := \sum_{k=1}^n k \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^3} \cdot P(k) < \sum_{k=1}^n k \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{4 \cdot n^2}$ folgt schließlich für $n \rightarrow \infty$

$$A_{Fk}(n) = 2 \cdot Afk(n, 0, \pi/2) = \lambda^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(n)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - s(n)\right) \rightarrow \lambda^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad (73b)$$

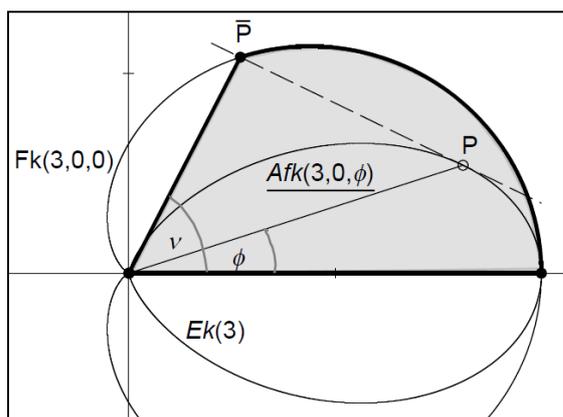
3. Die Fußpunktkurve $Fk(3, 0, 0)$ der speziellen Eikurve $Ek(3)$.

Für $n = 3$ erhalten wir aus (71) nach ausgeführter Integration die Flächenformel für die zwischen 0 und ν liegende Sektorfläche der Fußpunktkurve $Fk(3, 0, 0)$

$$Afk(3, 0, \phi) = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{729}{1024} \cdot \arctan(3t) - \frac{103}{1024} \cdot \arctan(t) + \\ & + \frac{2187}{1024} \cdot \frac{t}{1+9 \cdot t^2} - \frac{103}{1024} \cdot \frac{t}{1+t^2} - \frac{19}{384} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{48} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^3} \end{aligned} \right]_{t=0}^{t=\tan(\phi)}$$

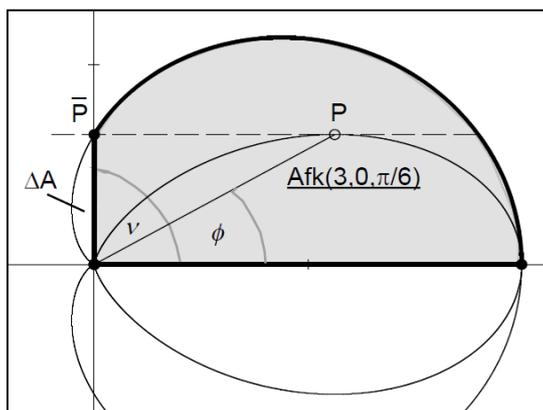
ϕ ist der vom Ursprung ausgehende Richtungswinkel des Punktes P auf der Eikurve $Ek(3)$ und ν der Richtungswinkel des zugehörigen Punktes \bar{P} auf der Fußpunktkurve. Nach (59) gilt zwischen den Winkeln die Beziehung $\tan(\nu) = \frac{4 \cdot \tan(\phi)}{1 - 3 \cdot \tan^2(\phi)}$.

$$t := 1/3, \quad \phi = \arctan(1/3) \approx 18,435^\circ, \\ \nu = \arctan(2) = \arctan(1) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{4} + \phi$$



$$Afk(3, 0, \phi) = \frac{\lambda^2}{128} \cdot \left[13 \cdot \pi - \frac{103}{16} \cdot \nu + \frac{19671}{1000} \right] \\ \approx 0,4171 \cdot \lambda^2$$

$$\phi := \pi/6, \quad t = \arctan(\pi/6) = \sqrt{3}/3, \\ \nu = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} = 3 \cdot \phi$$



$$Afk(3, 0, \pi/6) = \frac{\lambda^2}{128} \cdot \left[\frac{1355}{96} \cdot \pi + 9 \cdot \sqrt{3} \right] \\ \approx 0,4682 \cdot \lambda^2 \\ \Delta A = Afk(3, 0, \pi/2) - Afk(3, 0, \pi/6) = \\ = \frac{\lambda^2}{128} \cdot \left[\frac{523}{96} \cdot \pi - 9 \cdot \sqrt{3} \right] \approx 0,0119 \cdot \lambda^2$$

5.4. Krümmungsverhalten der $Ek(n)$; die Evolute der Eikurve

Jedem Punkt $P(\varphi)$ einer ebenen Kurve $r = r(\varphi)$ wird bekanntlich eine Krümmung $k(\varphi)$ mittels folgender Gleichung zugeordnet²¹: $k(\varphi) = \frac{r^2(\varphi) + 2 \cdot \dot{r}^2(\varphi) - r(\varphi) \cdot \ddot{r}(\varphi)}{(r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi))^{3/2}}$.

Der „Krümmungskreis“ mit dem Radius $\rho(\varphi) = |k(\varphi)|^{-1}$ berührt den Kurvenpunkt in zweiter Ordnung, d.h. in P haben Kurve und Kreis gleiche 1. und 2. Ableitungen.

Für die $Ek(n)$: $r(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi)$ erhalten wir unter Verwendung der Abkürzung (61), S. 20f wegen $r^2 + \dot{r}^2 = r^2 \cdot \mathbf{p}^2 / \cos^2 \varphi$ und $r^2 + 2 \cdot \dot{r}^2 - r \cdot \ddot{r} = r^2 \cdot \mathbf{p}^2 / \cos^2 \varphi + r^2 \cdot n / \cos^2 \varphi$

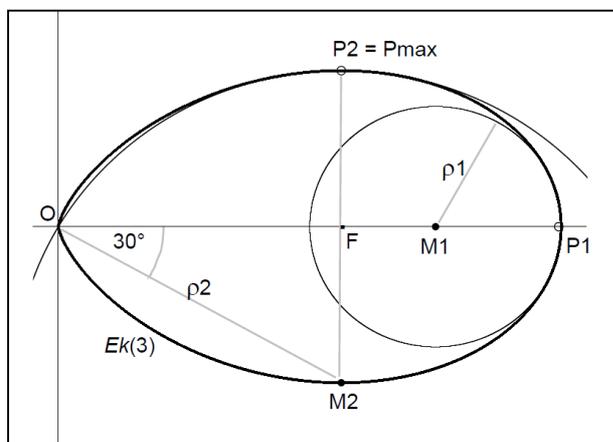
$$\underline{\rho(\varphi) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^3} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = \frac{\lambda \cdot \cos^{n-1} \varphi}{\mathbf{p}^2 + n}, \quad \mathbf{p}^2 = n^2 \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2. \quad (75)$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt auf der Kurvennormalen und konkaven Seite der $Ek(n)$. Der Kreis $Ek(1)$ ist sein eigener Krümmungskreis mit $\rho(\varphi) = \lambda/2$.

Für $n > 1$ und ausgewählte (Scheitel-)Punkte folgen aus (75) die Krümmungsradien

$$\rho(0) = \frac{\lambda}{n+1}, \quad \rho(\varphi_{\max}) = \frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{und} \quad \rho\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{d.h. in der Singularität } O$$

entartet der Krümmungskreis zum Punkt.



Für die spezielle Eikurve $Ek(3)$ gilt

$$\begin{aligned} M_1 P_1 &= \rho_1 = \frac{1}{4} \cdot \lambda = \frac{1}{4} O P_1, \\ M_2 P_2 &= \rho_2 = \rho(\varphi_{\max}) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \lambda = 2 \cdot y_{\max} \\ &= O P_2 = O M_2, \\ O F &= x_{\max} = \frac{9}{16} \cdot \lambda = \frac{3}{4} O M_1. \end{aligned}$$

Da diese Krümmungskreise somit leicht konstruierbar sind, ergibt sich für die $Ek(3)$ eine einfache Näherungskonstruktion.

Wir bestimmen auf der $Ek(n > 1)$ den besonderen Punkt $P_s(\varphi_s > 0)$ mit minimaler Krümmung

(bzw. maximalem Krümmungsradius) aus dem Ansatz $\dot{\rho}(\varphi) = \rho \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + 3 \cdot \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}} = 0, \quad \rho > 0$.

Mit $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\varphi}(\mathbf{p}^2) = (n^2 - 1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ und $\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}} = \dots = -\frac{(n-1) \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{\mathbf{p}^2 + n}$ folgt

²¹ Siehe z.B. BRONSTEIN: Taschenbuch der Mathematik

$$\dot{\rho} = -\frac{(n-1) \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{(n^2-1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (\mathbf{p}^2 + 3 \cdot n)}{(\mathbf{p}^2 + n) \cdot \mathbf{p}^2} = 0, \text{ wobei der Scheitel } \varphi = 0 \text{ entfällt.}$$

Wird schließlich $\cos^2 \varphi$ mittels (61) durch \mathbf{p}^2 ersetzt, ergibt sich die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^2(\varphi_s)$: $\mathbf{p}^4 + 2 \cdot \mathbf{p}^2 - 3 \cdot n^2 = 0$, also $\mathbf{p}^2(\varphi_s) = -1 + \sqrt{3 \cdot n^2 + 1}$ oder wieder mittels (61)

$$\cos^2(\varphi_s) = \frac{n^2 - \mathbf{p}^2}{n^2 - 1} = \frac{n^2 + 1 - \sqrt{3n^2 + 1}}{n^2 - 1} \text{ mit } \rho(\varphi_s) = \max! \quad (76)$$

Wegen $3 \cdot n^2 + 1 > (n+1)^2$ ist $\cos^2(\varphi_s) < \frac{n^2 + 1 - (n+1)}{n^2 - 1} = \frac{n}{n+1} = \cos^2(\varphi_{\max})$, d.h. $\varphi_s > \varphi_{\max}$.

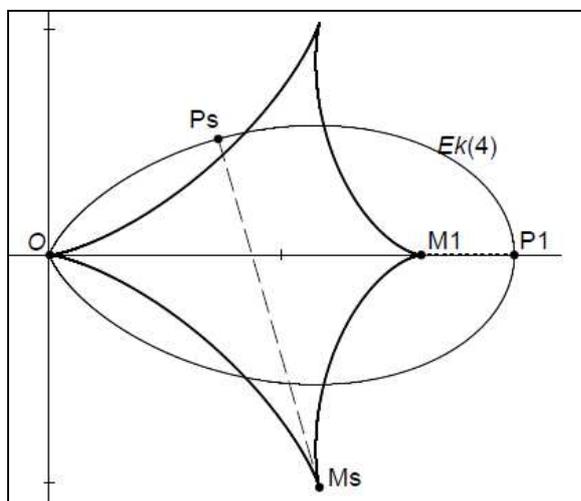
Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte $M(\xi, \eta)$ der $Ek(n)$ bildet deren *Evolute*. Die Parameterdarstellung der Evolute lautet

$$\xi(\varphi) = n \cdot \mathbf{q} \cdot (\cos^2 \varphi + \mathbf{p}^2 \sin^2 \varphi), \quad \eta(\varphi) = n \cdot \mathbf{q} \cdot (1 - \mathbf{p}^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (77)$$

Diese Darstellung folgt aus der Tatsache, dass $M(\xi, \eta)$, wie oben erwähnt, auf der Normalen von $P(x, y)$ liegt. Mit dem Normalenanstiegswinkel ν und dem Krümmungsradius ρ erhalten wir die Koordinatendifferenzen $x(\varphi) - \xi(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \cos(\nu)$ und $y(\varphi) - \eta(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \sin(\nu)$.

Unter Verwendung von (59), (61)f und (75) folgen (bis auf Umformungen) die Formeln (77)

$$\begin{aligned} \xi(\varphi) &= x(\varphi) - \rho \cdot \cos(\nu) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}^2 + n) \cdot \cos^2 \varphi - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^3 \cdot (\cos^2 \varphi - n \cdot \sin^2 \varphi) / \mathbf{p}, \\ \eta(\varphi) &= y(\varphi) - \rho \cdot \sin(\nu) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}^2 + n) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}^3 \cdot (n+1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi / \mathbf{p}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n = 4 &\Rightarrow \mathbf{p}^2(\varphi_s) = 6, \quad \rho(\varphi_s) = 4/5 \\ OM_s &= \frac{4}{5} \lambda, \quad M_1M_s = \frac{3}{5} \lambda, \quad U_{Ev} = \frac{14}{5} \lambda. \end{aligned}$$

Evolute der $Ek(n)$.

Die zu den (lokalen) Extrempunkten der Krümmung der $Ek(n)$

$$O, P1, Ps$$

gehörenden Krümmungsmittelpunkte

$$O, M1, Ms$$

bilden Rückkehrpunkte (Spitzen) der Evolute.

Die Tangenten der Evolute konvergieren bei Annäherung an die Rückkehrpunkte gegen die Normalen der Extrempunkte.

Die Längen eines Evolutenbogens ist gleich dem Zuwachs der Krümmungsradien der erzeugenden Kurve²²

$$OM_s = \rho(\varphi_s), \quad M_1M_s = \rho(\varphi_s) - \rho(0).$$

Für den Umfang der Evolute gilt

$$U_{Ev}(n) = 4 \cdot \rho(\varphi_s) - 2 \cdot \rho(0) \quad .$$

²² Vorausgesetzt, dass im betreffenden Bogen stets $\dot{\rho}(\varphi) \neq 0$ ist. Den Beweis findet man in einschlägigen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung bzw. Differentialgeometrie.

Mit den Änderungen $\mathbf{q} := \frac{\sqrt{r^2(\varphi)} \cdot \cos^{-1} \varphi}{\mathbf{p}^2 + n}$ und $\rho(\varphi) := \sqrt{\mathbf{q}^2} \cdot \mathbf{p}^3$ gelten die Gleichungen (75)

und (77) auch für die Evolute der erweiterten Eikurve $EK(n)$ mit beliebigen reellen φ .

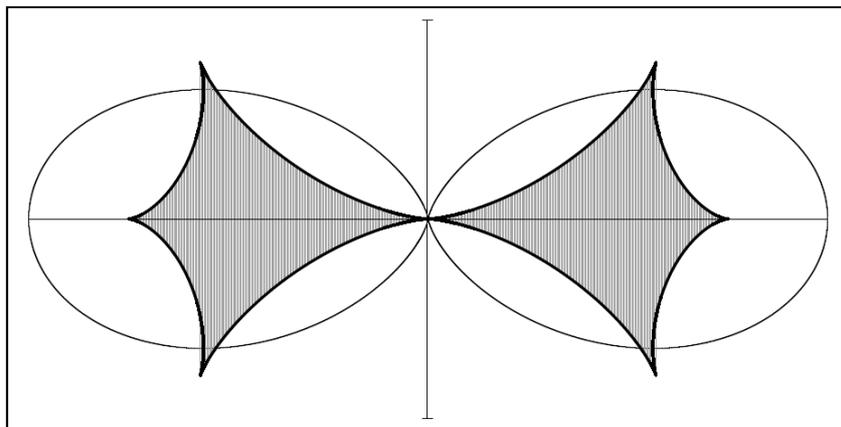
Die Symmetrie- und Periodenbedingungen können leicht nachgeprüft werden.

$$\rho(\varphi + 2\pi) = \rho(\varphi), \quad \rho(-\varphi) = \rho(\varphi), \quad \rho(\pi - \varphi) = \rho(\varphi), \quad \rho(\varphi) \geq 0,$$

$$\xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi), \quad \xi(-\varphi) = \xi(\varphi), \quad \xi(\pi - \varphi) = -\xi(\varphi),$$

$$\eta(\varphi + 2\pi) = \eta(\varphi), \quad \eta(-\varphi) = -\eta(\varphi), \quad \eta(\pi - \varphi) = \eta(\varphi).$$

Läuft φ von 0 bis 2π , so wandert der Kurvenpunkt, beginnend an der rechten Spitze, im Urzeigersinn um die Evolutenfläche.



Evolute der $EK(3)$

5.5. Die $EK(n)$ als Billardbande

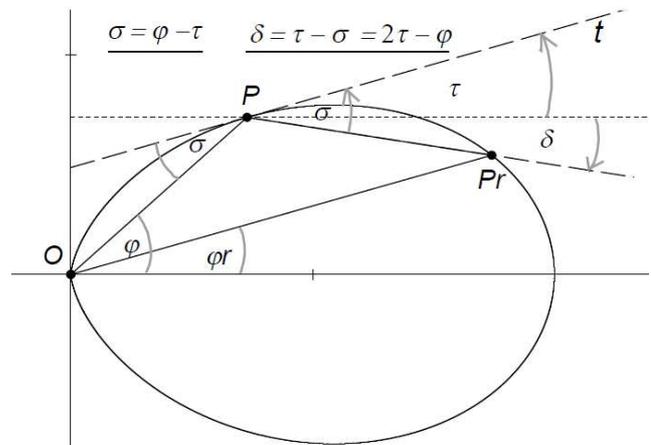
Die Reflexion von Strahlen innerhalb der Eikurve $EK(n)$, oder – um im Bild der Überschrift zu bleiben – der Verlauf von Billardkugeln auf dem Billardtisch in Form der Eifläche, hängt eng mit den Tangenteigenschaften der Kurve zusammen. Wir begnügen uns mit ausgewählten Beispielen.

Ein Strahl vom Ursprung O zum Kurvenpunkt $P(\varphi)$ wird zum Kurvenpunkt $Pr(\varphi_r)$ reflektiert, wobei der Einfallswinkel σ zur Tangenten \mathbf{t} dem Ausfallswinkel gleich ist.

Der Grafik entnehmen wir die Beziehung

$$\tan(2\tau - \varphi) = \tan(\delta) = \frac{y(\varphi_r) - y(\varphi)}{x(\varphi_r) - x(\varphi)}.$$

φ und φ_r Richtungswinkel von P und Pr ,
 τ Anstiegswinkel der Tangente von P und
 x, y Punktkoordinaten nach Formel (2).



Der Winkel τ wird nach der Formel (59) mittels Additionstheorem des Tangens durch φ ersetzt, sodass unter weitgehender Verwendung des Kosinus folgende Beziehung entsteht:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{n^2 - (n+1)^2 \cos^2 \varphi}{n(n+2) - (n+1)^2 \cos^2 \varphi} = \frac{y(\varphi r) - y(\varphi)}{x(\varphi r) - x(\varphi)} = \frac{\cos^n(\varphi r) \cdot \sin(\varphi r) - \cos^n \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos^{n+1}(\varphi r) - \cos^{n+1} \varphi} \quad (78)$$

Der Formel entnehmen wir für einige Positionen von Pr den Punkt P .

- (a) $Pr = O$, d.h. $\varphi r = \pi/2$. (78) ist erfüllt für $\varphi = 0$. P ist der Scheitel $P(\lambda, 0)$.

Der Strahl (- die Kugel -) kommt (wie zu erwarten) vom Scheitel nach O zurück.

Im Folgenden sei $0 < \varphi < \pi/2$, d.h. der gesuchte Punkt $P(\varphi)$ liegt im 1. Quadranten. Das spiegelbildliche Lösungspaar $Pr(-\varphi)$, $P(-\varphi)$ wird nicht extra aufgeführt.

- (b) $Pr = Pr(\lambda, 0)$, d.h. $\varphi r = 0$. (78) führt auf die Bestimmungsgleichung

$$2n \cdot \cos^{n+1}(\varphi) - (n+1)^2 \cdot \cos^2(\varphi) + n^2 = 0 \quad \text{mit den speziellen Lösungen}$$

$$n = 1 \quad \cos(\varphi) = 1/\sqrt{2} \quad \varphi = 45^\circ \quad \underline{P = P(\lambda/2; \lambda/2)},$$

$$n = 2 \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{33} + 1}{8} \quad \varphi = 32,534^\circ \quad \underline{P = P(0,599 \lambda; 0,382 \lambda)},$$

$$n = 3 \quad \cos(\varphi) = \sqrt{\frac{8 - \sqrt{10}}{6}} \quad \varphi = 26,112^\circ \quad \underline{P = P(0,650 \lambda; 0,319 \lambda)}.$$

Die Kugel läuft von O über $P(\varphi)$, Scheitel $Pr(\varphi r)$ und $P(-\varphi)$ nach O zurück.

- (c) $y(\varphi r) = y(\varphi)$, d.h. \overline{PPr} verläuft horizontal. (78) wird erfüllt durch die Bedingung

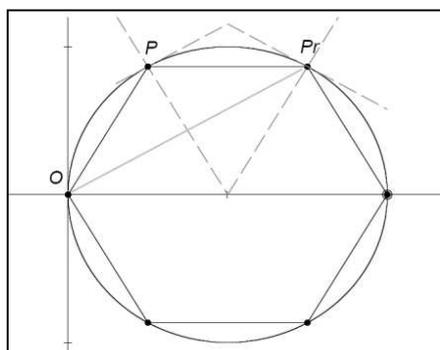
$$n^2 - (n+1)^2 \cos^2 \varphi = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad \underline{\cos(\varphi) = \frac{n}{n+1}}. \quad \text{Aus } y(\varphi r) = y(\varphi) \text{ folgt zur}$$

$$\text{Ermittlung von } \varphi r \neq \varphi \text{ die Gleichung} \quad \cos^{2n+2}(\varphi r) - \cos^{2n}(\varphi r) + \frac{(2n+1) \cdot n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} = 0.$$

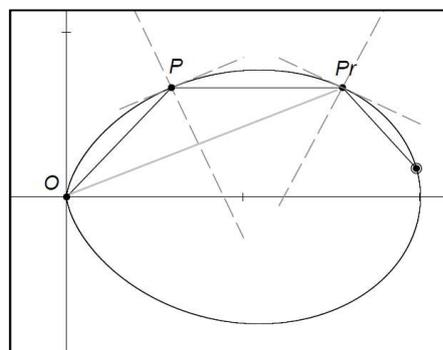
$$n = 1 \quad \cos(\varphi) = 1/2 \quad \cos(\varphi r) = \sqrt{3}/2 \quad \varphi = 60^\circ \quad \varphi r = 30^\circ,$$

$$n = 2 \quad \cos(\varphi) = 2/3 \quad \cos(\varphi r) = (\sqrt{105} + 5)/18 \quad \varphi = 48,190^\circ \quad \varphi r = 23,022^\circ,$$

$$n = 3 \quad \cos(\varphi) = 3/4 \quad \cos(\varphi r) \approx 0,943 \quad \varphi \approx 41,410^\circ \quad \varphi r \approx 19,438^\circ ..$$



Ek(1)



Ek(2)

Lohnenswert wäre die allgemeine Suche nach Reflexionswegen zum Punkt O zurück. Ein Beispiel ist im Kreis Ek(1) der symmetrische Weg mit 6 Bandenberührungen.

(d) $\overline{Pr} = P(-\varphi)$, d.h. Pr liegt spiegelbildlich zu P : $x(\overline{Pr}) = x(\varphi)$. (78) wird erfüllt durch

$$n(n+2) - (n+1)^2 \cos^2 \varphi = 0 \text{ mit der Lösung } \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{n \cdot (n+2)}}{n+1} \text{ bzw. } \sin(\varphi) = \frac{1}{n+1}.$$

$$n = 1 \quad \varphi = \arcsin(1/2) = 30^\circ \quad P = P\left(\frac{3}{4}\lambda; \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\right) \approx P(0,750\lambda; 0,433\lambda),$$

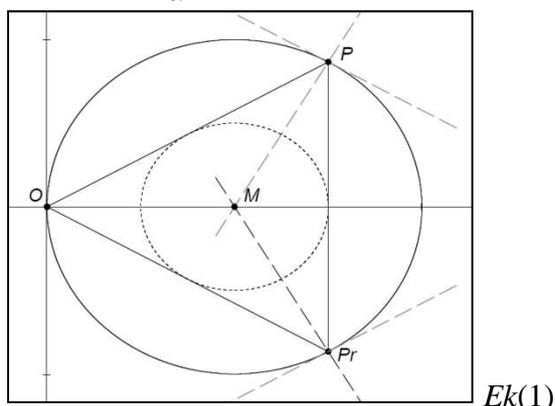
$$n = 2 \quad \varphi = \arcsin(1/3) = 19,471^\circ \quad P = P\left(\frac{16\sqrt{2}}{27}\lambda; \frac{8}{27}\lambda\right) \approx P(0,838\lambda; 0,296\lambda),$$

$$n = 3 \quad \varphi = \arcsin(1/4) = 14,478^\circ \quad P = P\left(\frac{225}{256}\lambda; \frac{15\sqrt{15}}{256}\lambda\right) \approx P(0,879\lambda; 0,227\lambda).$$

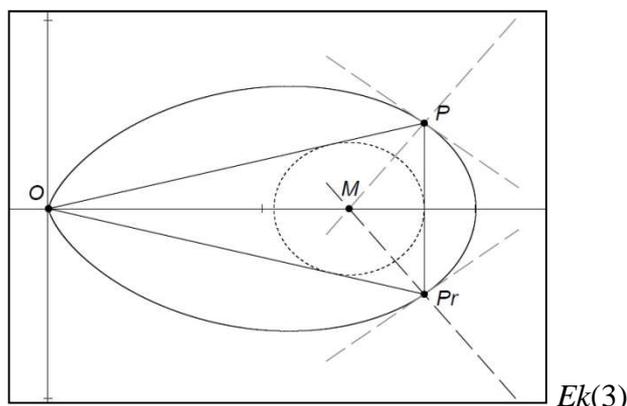
Die Kugel läuft von O über $P(\varphi)$ und $P(-\varphi)$ nach O zurück. \overline{PPr} ist vertikal.

Die Normalen von P und Pr schneiden sich (vgl. (59)) an der Stelle $x_N(\varphi) = \frac{n}{n+1} \cdot \cos^{n-1}(\varphi)$.

Der Innkreis des „Reflexionsdreiecks“ \overline{OPPr} hat den Mittelpunkt $M(x_N, 0)$ und den Radius $\rho = x(\varphi) - x_N(\varphi)$.



$$x_N = \frac{1}{2} \cdot \lambda, \quad \rho = \frac{1}{4} \cdot \lambda$$



$$x_N = \frac{45}{64} \cdot \lambda, \quad \rho = \frac{45}{256} \cdot \lambda$$

(e) $\tan(\delta) := m$. In Verallgemeinerung von (c), (d) geben wir den Anstieg m von \overline{PPr} vor.

Es genügt aufgrund der Symmetrie zur x-Achse $m \geq 0$ zu betrachten. Die Lösungen für $-m$ ergeben sich durch Spiegelung der Lösungen von m .

Aus (78) folgt über $\sin \varphi \cdot (n^2 - (n+1)^2 \cos^2 \varphi) = m \cdot \cos \varphi \cdot (n \cdot (n+2) - (n+1)^2 \cos^2 \varphi)$ (79a) die Bestimmungsgleichung für $z := \cos^2 \varphi$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$,

$$F(z) \equiv (m^2 + 1) \cdot (n+1)^4 \cdot z^3 - [2m^2 \cdot n \cdot (n+2) + 3n^2 + 2n + 1] \cdot (n+1)^2 \cdot z^2 + [m^2(n+2)^2 + 3n^2 + 4n + 2] \cdot n^2 \cdot z - n^4 = 0. \quad (79b)$$

An den folgenden Intervallenden für z treten Vorzeichenwechsel von $F(z)$ auf:

$z =$	0	$n^2/(n+1)^2$	$n \cdot (n+2)/(n+1)^2$	1
$F(z) =$	$-n^4$	$+4 \cdot m^2 \cdot n^2/(n+1)^2$	$-4 \cdot n^2/(n+1)^2$	$+n^2$

In jedem Intervall existiert demnach genau eine reelle Lösung $z_i := \cos^2(\varphi_i)$. Es gibt drei verschiedene Punktepaare (P, Pr) . Dabei ist der Winkel φ_i nach (79a) genau dann negativ, wenn $n^2 < (n+1)^2 \cdot z < n \cdot (n+2)$ gilt, d.h. für den mittleren Bereich zwischen horizontaler und vertikaler Richtung von \overline{PPr} .

$Pr(\varphi r)$ ist ein Schnittpunkt der $Ek(n)$ und der Geraden durch $P(\varphi)$ mit dem Anstieg m .

Die Geradengleichung ist $y = m \cdot x + b$ mit $b = \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot (\sin \varphi - m \cdot \cos \varphi)$. (79c)

Aus (79c) und der Kurvengleichung (3) ergeben sich die Koordinaten $Pr(x_r, y_r)$, $0 < x_r \leq \lambda$, und der Winkel $\varphi r = \arctan(y_r/x_r)$.

Dies führen wir an zwei Beispielen näher aus.

(e1) $n=1$. $16 \cdot (m^2 + 1) \cdot z^3 - 24 \cdot (m^2 + 1) \cdot z^2 + 9 \cdot (m^2 + 1) \cdot z - 1 = 0$. $z := \cos^2 \varphi = x(\varphi)$.

$$(m^2 + 1) \cdot x_r^2 + (2 \cdot m \cdot b - \lambda) \cdot x_r + b^2 = 0. \Rightarrow x_r = \frac{\lambda - 2 \cdot m \cdot b}{m^2 + 1} - x(\varphi).$$

$m=1$. $\delta = 45^\circ$. $(16 \cdot z^2 - 16 \cdot z^2 + 1) \cdot (2 \cdot z - 1) = 0$.

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 - z_1, \quad z_3 = \frac{1}{2} \quad (z_2 < z_3 < z_1).$$

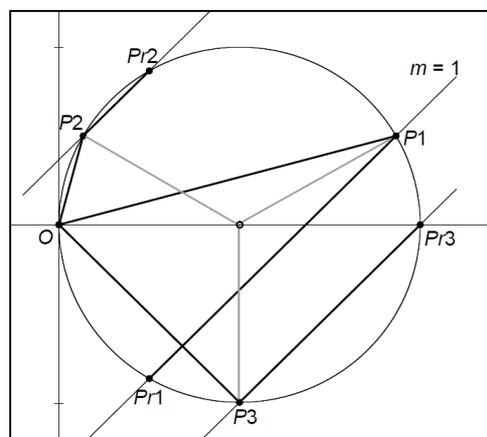
$$\varphi_1 = \arccos(\sqrt{z_1}) = 15^\circ \rightarrow^{23}, \quad \varphi_2 = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ, \quad \varphi_3 = -\arccos(\sqrt{z_3}) = -45^\circ.$$

$$b(\varphi_1) = -0,6830 \cdot \lambda, \\ x_r = 0,25 \cdot \lambda, \quad y_r = -0,4330 \cdot \lambda, \quad \varphi r_1 = -60^\circ.$$

$$b(\varphi_2) = 0,1830 \cdot \lambda, \\ x_r = 0,25 \cdot \lambda, \quad y_r = 0,4330 \cdot \lambda, \quad \varphi r_2 = 60^\circ.$$

$$b(\varphi_3) = -1 \cdot \lambda, \\ x_r = 1 \cdot \lambda, \quad y_r = 0 \cdot \lambda, \quad \varphi r_3 = 0^\circ.$$

Am Kreis ließe sich diese Aufgabe auch elementargeometrisch lösen.



(e2) $n=3$. $256 \cdot (m^2 + 1) \cdot z^3 - 32 \cdot (15m^2 + 17) \cdot z^2 + 9 \cdot (25m^2 + 41) \cdot z - 81 = 0$. $z := \cos^2 \varphi$.

$$[x_r^2 + (m \cdot x_r + b)^2] - \lambda \cdot x_r^3 = 0. \text{ Numerisch lösen! } b = \lambda \cdot \cos^3 \varphi \cdot (\sin \varphi - m \cdot \cos \varphi).$$

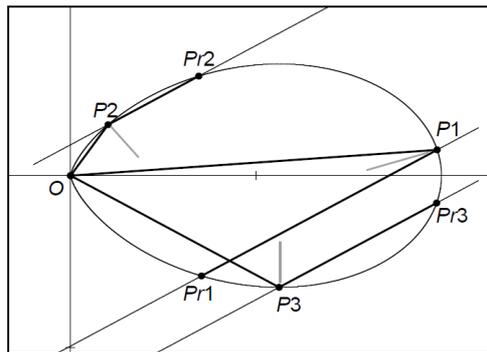
$m=1/\sqrt{3}$. $\delta = 30^\circ$. $(256 \cdot z^2 - 336 \cdot z^2 + 81) \cdot (z - 3/4) = 0$.

$$z_1 = \frac{21}{32} + \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{32}, \quad z_2 = \frac{21}{32} - \frac{3 \cdot \sqrt{13}}{32}, \quad z_3 = \frac{3}{4} \quad (z_2 < z_3 < z_1).$$

$$\varphi_1 \approx 4,34^\circ, \quad \varphi_2 \approx 55,66^\circ = 60^\circ - \varphi_1, \quad \varphi_3 = -30^\circ.$$

²³ $\cos^2(15^\circ) = \frac{1 + \cos(30^\circ)}{2}$

$$\begin{aligned}
 b(\varphi_1) &= -0,4957 \cdot \lambda, \\
 x_r &\approx 0,3532 \cdot \lambda, \quad y_r = -0,2918 \cdot \lambda, \quad \varphi r_1 \approx -39,57^\circ \\
 b(\varphi_2) &= 0,0898 \cdot \lambda, \\
 x_r &\approx 0,3459 \cdot \lambda, \quad y_r = 0,2895 \cdot \lambda, \quad \varphi r_2 \approx 39,93^\circ. \\
 b(\varphi_3) &= 0,6495 \cdot \lambda, \\
 x_r &\approx 0,9871 \cdot \lambda, \quad y_r = -0,0796 \cdot \lambda, \quad \varphi r_3 \approx -4,61^\circ.
 \end{aligned}$$



In beiden Fällen (e1, e2) ist $P_3 = P_{\min}$ und $\varphi_1 + \varphi_2 + 2 \cdot \varphi_3 = 0$. Dies ist kein Zufall:

(f) $E(n)$ gegeben, $m = \tan(\delta) := \frac{1}{\sqrt{n}}$ gewählt. Es ist nach (11) $\delta = \varphi_{\max}$.

$P_{\min}(-\delta)$ mit horizontaler(!) Tangente ist ein gesuchter (mittlere) Reflexionspunkt. $\varphi_3 := -\delta$.

Es gilt $z_3 = \cos^2(\varphi_3) = \frac{1}{m^2 + 1} = \frac{n}{n+1}$. Mit $m = 1/\sqrt{n}$ liefert (79b) umgeformt schließlich

$$F(z) \equiv \frac{(n+1)^5}{n} \cdot \left(z^2 - \frac{2 \cdot n \cdot (n^2 + n + 2)}{(n+1)^3} \cdot z + \frac{n^4}{(n+1)^4} \right) \cdot \left(z - \frac{n}{n+1} \right) = 0 \quad \text{mit } z_3 = \frac{n}{n+1},$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{n^4}{(n+1)^4} \quad \text{und} \quad z_1 + z_2 = \frac{2 \cdot n \cdot (n^2 + n + 2)}{(n+1)^3}. \quad \text{Daraus folgt die Winkelbeziehung}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \sqrt{z_1 \cdot z_2} - \sqrt{(1-z_1) \cdot (1-z_2)} = \\
 &= \sqrt{z_1 \cdot z_2} - \sqrt{1 - (z_1 + z_2) + z_1 \cdot z_2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \cos^2(\delta) - \sin^2(\delta) = \cos(2 \cdot \delta).
 \end{aligned}$$

Es gilt für alle $E(n)$ mit $\delta := \varphi_{\max}$: $\varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \delta = -2 \cdot \varphi_3$.

Abschließend befassen wir uns mit folgendem Problem:

Die im Beispiel (d) dargestellten Dreiecke $OPPr$ haben die Eigenschaft, dass eine Kugel (reibungslöse) beständig das Dreieck durch Reflexion durchlaufen würde, unabhängig vom Starteckpunkt. Gibt es in der $Ek(n)$ weitere derart *perfekte Reflexionsdreiecke*?

Für den Kreis $Ek(1)$ sind die (und nur die) einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke perfekt. Aufgrund geringerer Kurvensymmetrie ist die Antwort für $n > 1$ nicht so einfach.

Wir beschränken uns auf die spezielle Eikurve $Ek(3)$.

Das der $Ek(3)$ einbeschriebene Dreieck ABC ist genau dann perfekt, wenn die Normalen der Eckpunkte auch die Winkelhalbierende sind!

Es müssen also folgende Forderungen erfüllt sein:

(1) Die drei Normalen schneiden sich in einem Punkt $M(x_m, y_m)$.

(2) Die Normale in A halbiert den Winkel $\angle BAC$.

(3) Die Normale in B halbiert den Winkel $\angle ABC$.

$M(x_m, y_m)$ ist nach (2) und (3) der Innkreismittelpunkt.

Geben wir die Koordinaten x_m, y_m des Innkreismittelpunktes vor, so sind die Lösungen φ der Normalengleichung (58a) die Richtungswinkel von Eckpunkten, welche die Forderung (1) erfüllen. Wir formen (58a) für $n = 3$ geeignet um und erhalten die Bedingungsgleichung

$$(3 - 4 \cdot z)^2 \cdot y_m^2 = z \cdot (1 - z) \cdot (3 \cdot \lambda \cdot z - 4 \cdot x_m)^2, \quad z := \cos^2 \varphi. \quad (80a)$$

Die Forderungen (2) und (3) beschreiben wir mit Hilfe des Skalarprodukts. Sei $\alpha = \angle BAC$, dann folgt aus (2) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}$ und aus (3) für $\beta = \angle ABC$ eine

analoge Forderung. Zusammenfassend gelten die Bedingungen

$$|\overrightarrow{AC}| \cdot \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AM}, \quad |\overrightarrow{BC}| \cdot \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BM} = |\overrightarrow{BA}| \cdot \overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BM}. \quad (80b,c)$$

Die Bedingungen (80) sind nur für spezielle Lagen des Dreiecks ABC erfüllbar.

Im einfachen Fall $y_m = 0$ liegt M auf der Symmetrieachse. Aus (80a) ergeben sich die Lösungen $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \frac{4}{3} \frac{x_m}{\lambda}$ mit $0 < x_m < \frac{3}{4} \lambda$. Die zugehörigen Dreiecke sind $\varphi_A = \arccos(\sqrt{z_3}), \varphi_B = \arccos(-\sqrt{z_3}) = -\varphi_A, \varphi_C = \pi/2$ bzw. $\varphi_C = 0$.

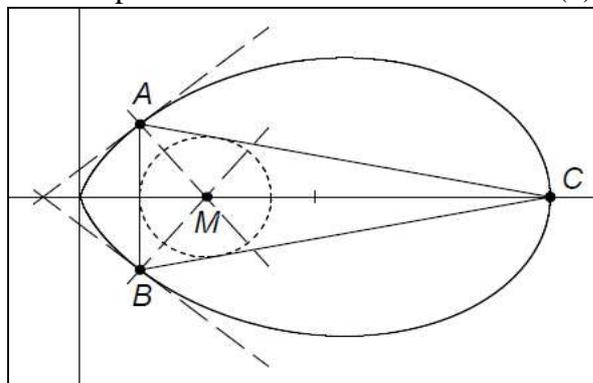
A und B liegen zur x -Achse symmetrisch, so dass schon aus (80b) die zulässigen x_m folgen. Mit $A(x_A, y_A), B(x_A, -y_A), C(x_C, 0), M(x_m, 0)$ und $z := \cos^2 \varphi_A, 0 < z < 1$ erhält (80b) die Darstellung $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + y_A^2} \cdot [0 + 2y_A^2] = 2y_A \cdot [(x_C - x_A) \cdot (x_m - x_A) + y_A^2]$.

Wir ersetzen die Koordinaten $x_A = \lambda \cdot z^2, y_A^2 = \lambda^2 \cdot z^3 \cdot (1 - z), x_m = \frac{3}{4} \lambda \cdot z$ durch z und erhalten die Bestimmungsgleichungen

$x_C := 0$: $16 \cdot z^6 \cdot (1 - z) = z^6$ mit $z = 15/16$ und $\sin(\varphi_A) = \sqrt{1 - z^2} = 1/4$ (Lösung (d) !);

$x_C := \lambda$: $z^3 \cdot (1 - z)^2 \cdot (1 + z) \cdot (16 \cdot z^2 - 31 \cdot z + 9) = 0$ mit $z = \frac{31 - \sqrt{385}}{32} = \left(\frac{\sqrt{55} - \sqrt{7}}{8}\right)^2$.

Zweites perfekte Reflexionsdreieck der $Ek(3)$.



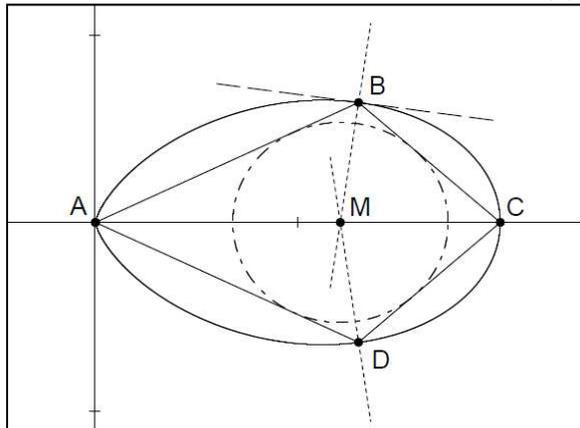
$$\begin{aligned} \varphi_A &= \arccos(\sqrt{z}) \approx 53,394^\circ, \quad \varphi_B = -\varphi_A. \\ x_A = x_B &= \frac{673 - 31\sqrt{385}}{512} \cdot \lambda \approx 0,1264 \cdot \lambda, \\ y_A = -y_B &\approx 0,1702 \cdot \lambda, \quad x_C = \lambda, \quad y_C = 0, \\ x_m &= \frac{93 - 3\sqrt{385}}{128} \cdot \lambda \approx 0,2667 \cdot \lambda, \quad y_m = 0, \\ \rho = x_m - x_A &= \frac{19\sqrt{385} - 301}{512} \cdot \lambda \approx 0,1402 \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Lohnenswert wäre die allgemeine Suche nach perfekten Reflexionsvielecken.

Anmerkung:

Setzen wir mit $\varphi_A = \arccos(\sqrt{z1}) = \pi/2$, $\varphi_B = \arccos(\sqrt{z3}) = -\varphi_D$, $\varphi_C = \arccos(\sqrt{z2}) = 0$ vier Reflexionspunkte fest und führen mit (80c) für $z := \cos^2 \varphi_B$, $0 < z < 1$ analoge Umformungen wie oben durch, so entsteht die Bestimmungsgleichung $6z^2 - 16z + 9 = 0$ mit der schon in (b) aus einem anderen Ansatz gefundenen (und für $y_m = 0$ einzigen!) Lösung eines perfekten Reflexionsvierecks.

Perfektes Reflexionsviereck in der $Ek(3)$.



Vergleiche (b). $z = (8 - \sqrt{10})/6$.

$$\varphi_B = \arccos(\sqrt{z}) \approx 26,122^\circ, \quad \varphi_D = -\varphi_B.$$

$$x_B = x_D = \frac{37 - 8\sqrt{10}}{18} \cdot \lambda \approx 0,6501 \cdot \lambda,$$

$$y_B = -y_D \approx 0,3186 \cdot \lambda,$$

$$x_A = y_A = 0, \quad x_C = \lambda, \quad y_C = 0,$$

$$x_m = \frac{8 - \sqrt{10}}{18} \cdot \lambda \approx 0,6047 \cdot \lambda, \quad y_m = 0,$$

$$\rho = x_m \cdot \sin(\varphi_B) = \frac{3}{4} \cdot z \cdot \sqrt{1-z} \cdot \lambda \approx 0,2662 \cdot \lambda.$$

5.6. Die $Ek(n)$ als Einhüllende einer Kreisschar; Verallgemeinerungen

Wir kehrten zu 5.4. zurück. Wird im Punkt $P = P(\varphi)$ der $Ek(n)$ die Normale errichtet und ein Kreis um den Achsenschnittpunkt $N(x_N, 0)$ mit dem Radius $r_k(\varphi) = |NP|$ gezogen, so ist P ein Berührungspunkt des Kreises. Die Berührung erfolgt von außen, denn $r_k(\varphi)$ ist nicht größer als der Krümmungsradius $\rho(\varphi)$ der $Ek(n)$.

Der Beweis folgt aus (77): Wegen $\mathbf{p}^2 = n^2 \cdot \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \geq 1$ ist für $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ $\eta(\varphi) = n \cdot \mathbf{q} \cdot (1 - \mathbf{p}^2) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \leq 0 = y_N$. (Vergleiche auch das Bild der Evolute.)

Durchläuft $P = P(\varphi)$ die Eikurve, so entsteht eine Kreisschar, die von der $Ek(n)$ eingehüllt wird. Für die Schargleichung $(x - x_N(\varphi))^2 + y^2 = r_k(\varphi)^2$ mit dem Parameter $\varphi = 0, \dots, \pi/2$ folgt aus (59)

$$\left(x - \lambda \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \cos^{n-1}(\varphi) \right)^2 + y^2 = \lambda^2 \cdot \cos^{2n-2}(\varphi) \cdot \left[\left(\cos^2(\varphi) - \frac{n}{n+1} \right)^2 + \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) \right],$$

oder mit dem Parameter $t := \cos^2(\varphi)$

$$\left(x - \lambda \cdot \frac{n}{n+1} \cdot t^{\frac{n-1}{2}} \right)^2 + y^2 = \lambda^2 \cdot t^{n-1} \cdot \frac{n^2 - (n^2 - 1) \cdot t}{(n+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (81)$$

Für $n = 1$ entartet die Schar zum Kreis $Ek(1)$: $(x - \lambda/2)^2 + y^2 = (\lambda/2)^2$.

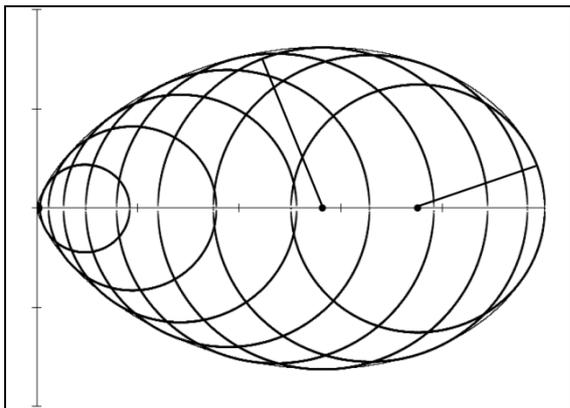
Aus $\frac{d}{dt} r^2(t) = \frac{d}{dt} \left[\lambda^2 \cdot t^{n-1} \cdot \frac{n^2 - (n^2 - 1) \cdot t}{(n+1)^2} \right] = 0$ erhalten wir für $t = \frac{n}{n+1}$ den Kreis mit dem größten Radius.

Weiterhin finden wir für $n > 1$ aus $\frac{d}{dt} [r(t) \pm x_M(t)] = \frac{d}{dt} \frac{\lambda}{n+1} \cdot t^{\frac{n-1}{2}} \cdot [\sqrt{n^2 - (n^2 - 1) \cdot t} \pm n] = 0$ die Abschätzungen $0 = r(0) - x_M(0) \leq r(t) - x_M(t)$ und $r(t) + x_M(t) \leq r(1) - x_M(1) = \lambda$.

Beispiel: Die $Ek(3)$ ist Einhüllende der Kreisschar $\left(x - \frac{3}{4} \cdot \lambda \cdot t\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot \lambda \cdot t\right)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \cdot t^3$.

Einhüllende: $Ek(3)$.

Kreisschar: $0 \leq t \leq 1$,



$$x_M = \frac{3 \cdot \lambda}{4} \cdot t, \quad y_M = 0, \quad r_k = \frac{\lambda}{4} \cdot t \cdot \sqrt{9 - 8 \cdot t}$$

$$t = 0: \quad x_M = 0, \quad r_k = 0$$

$$t = 3/4: \quad x_M = \frac{9 \cdot \lambda}{16}, \quad r_k = r_{\max} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \lambda}{16}$$

$$t = 1: \quad x_M = \frac{3}{4} \cdot \lambda, \quad r_k = \frac{1}{4} \cdot \lambda$$

Durch geeignete Verallgemeinerungen der Kreisscharen (81) können die Eikurven in umfassendere Familien von Hüllkurven eingeordnet werden. Wir wählen folgende Familie:

$$\text{Kurvenschar } Ks(m, p, a, b): \quad \underline{\left(x - a \cdot t^m\right)^2 + y^2 = a^2 \cdot t^{m+p} \cdot (1 - b \cdot t)}, \quad 0 \leq t \leq 1/b, \quad (82)$$

mit den Kennwerten $m > 0$, $p \geq 0$, $a > 0$ und $0 < b \leq 1$.

Die Kreise haben also die Mittelpunktskoordinaten und Radien

$$x_M(t) = a \cdot t^m, \quad y_M(t) = 0, \quad r_k(t) = a \cdot t^{\frac{m+p}{2}} \cdot \sqrt{1 - b \cdot t}. \quad (82a)$$

Der Kreis mit dem maximalen Radius wird aus der Ableitung $\frac{d}{dt} r_k(t) = 0$ gewonnen; es gilt

$$t_{\max} = \frac{1}{b} \cdot \frac{m+p}{m+p+1}, \quad x_{\max} = x_M(t_{\max}), \quad r_{\max} = r_k(t_{\max}).$$

Die am weitesten nach links bzw. rechts reichenden Kreise folgen aus der Bedingung $\frac{d}{dt} (x_M(t) \mp r_k(t)) = 0$. Bezeichnen wir deren Lösungen mit t_L und t_R , so sind die Grenzen des Definitionsbereichs auf der Abszisse $x_L = x_M(t_L) - r_k(t_L)$ und $x_R = x_M(t_R) + r_k(t_R)$.

Es kann demnach der Parameterbereich eingeschränkt werden: $t_L \leq t \leq t_R$. Für t -Werte außerhalb dieses Bereichs berühren die betreffenden Kreise nicht die Hüllkurve!

Die zur $Ks(m, p, a, b)$ gesuchte Hüllkurve $Hk(m, p, a, b)$ erfüllt die folgenden Bedingungen²⁴

$$F(x, y, t) \equiv y^2 + (x - a \cdot t^m)^2 - a^2 \cdot t^{m+p} \cdot (1 - b \cdot t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} F(x, y, t) = 0,$$

aus denen ihre Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ oder auch (gegebenenfalls nach Elimination von t) eine Gleichung in kartesischen Koordinaten $F(x, y) = 0$ ermittelbar ist.

Wir stellen die zweite Bedingung nach x um und erhalten die Gleichung der Hüllkurve

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a}{2 \cdot m} [2 \cdot m \cdot t^m - (m + p) \cdot t^p + b \cdot (m + p + 1) \cdot t^{p+1}] \\ y^2(t) = a^2 \cdot t^{m+p} \cdot (1 - b \cdot t) - (x(t) - a \cdot t^m)^2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1/b. \quad (83)$$

Wir betrachten zwei Spezialfälle. Dabei übergehen wir eine Reihe von Umformungen.

$Ks(1, 0, a, b)$ $(x - a \cdot t)^2 + y^2 = a^2 \cdot t^m \cdot (1 - b \cdot t)$. $x_M(t) = a \cdot t$, $r_k(t) = a \cdot \sqrt{t \cdot (1 - b \cdot t)}$.

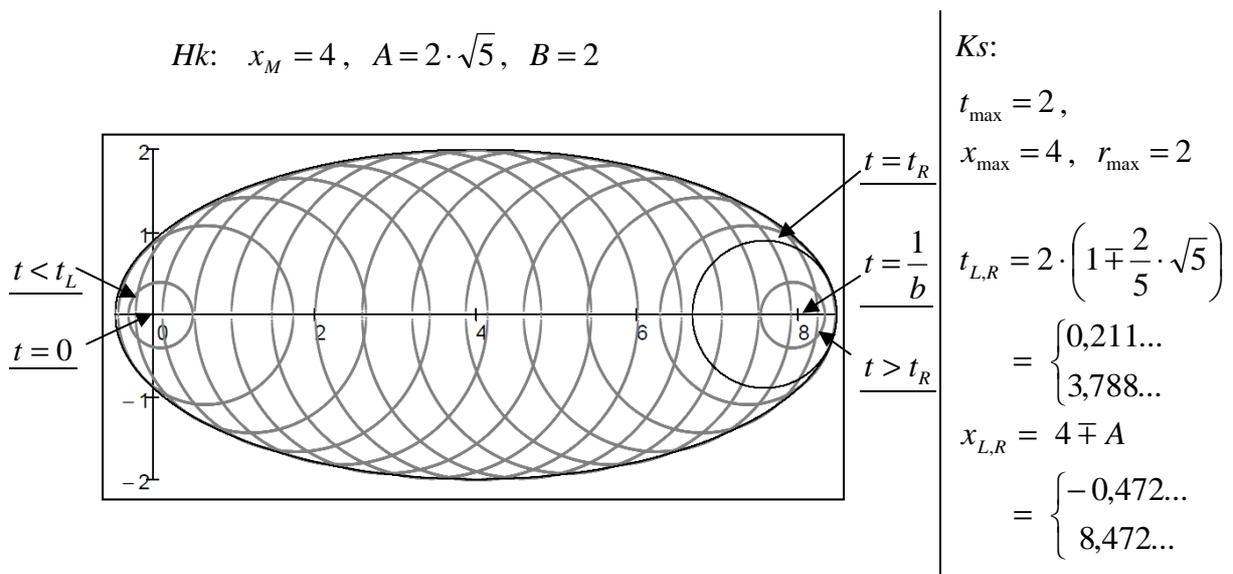
$$t_{\max} = \frac{1}{2 \cdot b}, \quad x_{\max} = \frac{a}{2 \cdot b}, \quad r_{\max} = \frac{a}{2 \cdot b} \cdot \sqrt{b}, \quad t_{L,R} = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{1+b}} \right).$$

$Hk(1, 0, a, b)$ $x(t) = a \cdot (b + t) \cdot t - \frac{a}{2}$, $y^2(t) = -a^2 \cdot b \cdot (b + 1 \cdot t^2) + a^2 \cdot (b + 1) \cdot t - \frac{a^2}{4}$.

Vereinfache $\frac{1}{b+1} \left(x(t) - \frac{a}{2 \cdot b} \right)^2 + \frac{1}{b} \cdot y(t)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4 \cdot b^2} !$

Die Hk ist eine Ellipse: $\frac{(x - x_M)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. $x_M = \frac{a}{2 \cdot b}$, $A = x_M \cdot \sqrt{b+1}$, $B = x_M \cdot \sqrt{b}$.

Beispiel: $Ks(1, 0, 2, 1/4)$, $0 \leq t \leq 1/b = 4$ und $Hk(1, 0, 2, 1/4)$, $x_L \leq x \leq x_R$.



²⁴ Siehe z.B. BRONSTEIN: Taschenbuch der Mathematik, Abschnitt Differentialgeometrie oder Näheres bei W.I. SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II, Berlin 1955 bzw. spätere Auflagen.

$$\underline{Ks(m, m, a, b)} \quad (x - a \cdot t^m)^2 + y^2 = a^2 \cdot t^{2m} \cdot (1 - b \cdot t).$$

Ein Vergleich mit der Formel (81) zeigt, dass bei geeigneter Wahl der Parameter die Hüllkurve eine Eikurve ist. Setze $m = p := \frac{n-1}{2}$, $a := \lambda \cdot \frac{n}{n+1}$, $b := \frac{n^2-1}{n^2}$, ($n > 1$).

$$\underline{Hk\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, \lambda \cdot \frac{n}{n+1}, \frac{n^2-1}{n^2}\right) = Ek(n)}.$$

Aus (83) folgt die Parameterdarstellung der $Ek(n)$: $x(t) = \lambda \cdot t^{\frac{n+1}{2}}$, $y^2(t) = \lambda^2 \cdot t^n \cdot (1-t)$.

Vereinfache $(x^2(t) + y^2(t))^{n+1} \Rightarrow (\lambda^2 \cdot t^n)^{n+1} = \lambda^{2n+2} \cdot t^{n(n+1)}$! Vgl. (3).

Für die Ks bzw. Hk gelten die Bedingungen: $0 \leq t \leq \frac{1}{b} = \frac{n^2}{n^2-1}$ bzw. $0 = t_L \leq t \leq t_R = 1$,

$$t_{\max} = \frac{n}{n+1}, \quad x_{\max} = x(t_{\max}) = \lambda \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad r_{\max} = r_k(t_{\max}) = \frac{x_{\max}}{\sqrt{n}}. \quad \text{Vgl. (11).}$$

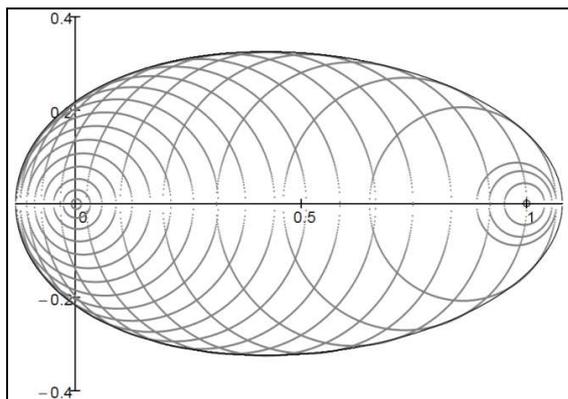
Auf der Seite 39 sind die $Ks\left(1, 1, \lambda \cdot \frac{3}{4}, \frac{8}{9}\right)$ und die $Ek(3) = Hk\left(1, 1, \lambda \cdot \frac{3}{4}, \frac{8}{9}\right)$ für $0 \leq t \leq 1$ abgebildet. Die dort nicht abgebildeten Kreise der Ks für $1 < t \leq 9/8$ liegen rechts im Inneren der $Ek(3)$ und berühren diese nicht.

Erwähnenswert ist die Identität der Kurvenscharen $Ks(m, m, a/k^m, b/k)$, $0 \leq t \leq k \cdot b$, für $k \geq 1$, die aus der Parametertransformation $t \Rightarrow k \cdot t$ folgt.

Abschließend zwei Beispiele zur Illustration der Formenvielfalt.

$Ks(3, 0, 1, 1)$:

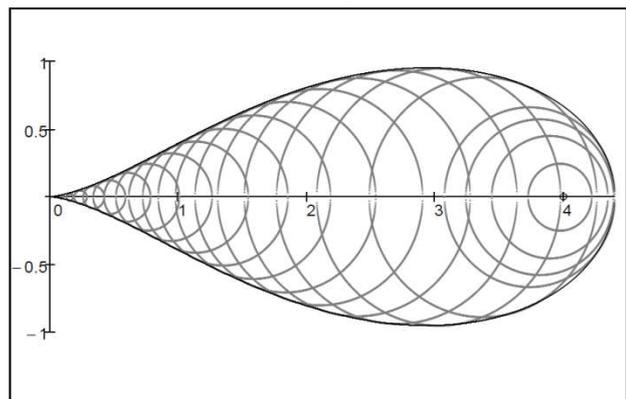
$$x_M(t) = t^3, \quad r_k(t) = \sqrt{t^3 \cdot (1-t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Hk: $6 \cdot x(t) = 6t^3 - (3-4t)$
 $36 \cdot y^2(t) = 36t^3 \cdot (1-t) - (3-4t)^2$
 $0,430 \approx t_L \leq t \leq t_R \approx 0,976..,$
 $-0,133.. \leq x(t) \leq 1,079..,$
 $t_{\max} = 3/4, \quad x_{\max} = 27/64 \approx 0,422,$
 $y_{\max} = r(t_{\max}) = 3\sqrt{3}/16 \approx 0,325 .$

$Ks(2, 4, 4, 1)$:

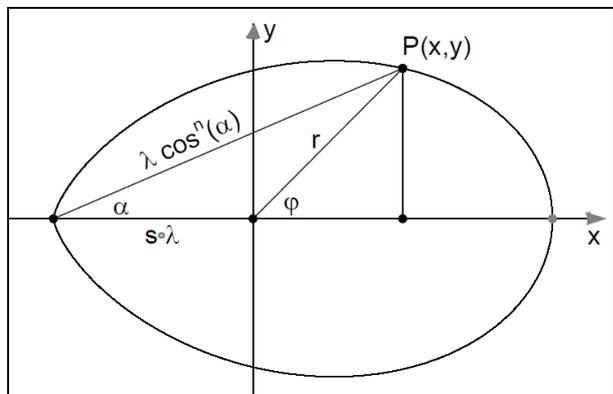
$$x_M(t) = 4t^2, \quad r_k(t) = 4t^3 \cdot \sqrt{1-t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Hk: $x(t) = 4t^2 - t^4 \cdot (6-7t)$
 $y^2(t) = 16t^6 \cdot (1-t) - t^8 \cdot (6-7t)^2$
 $0 = t_L \leq t \leq t_R \approx 0,966.., \quad 0 \leq x(t) \leq 4,397..$
 $t_{\max} = 6/7, \quad x_{\max} = 144/49 \approx 2,934,$
 $y_{\max} = r(t_{\max}) = 864\sqrt{7}/2401 \approx 0,952.$

6. Die Ek(n) in ausgewählten Lagen und Koordinatendarstellungen

6.1. Verschiebung des Koordinatenursprungs auf der x-Achse



$$\left[(x + s\lambda)^2 + y^2 \right]^{n+1} = \lambda^2 \cdot (x + s\lambda)^{2n} \quad (84a)$$

$$-\infty < s < \infty, \quad -s\lambda \leq x \leq (1-s)\lambda$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\alpha) - s \cdot \lambda \quad (84b)$$

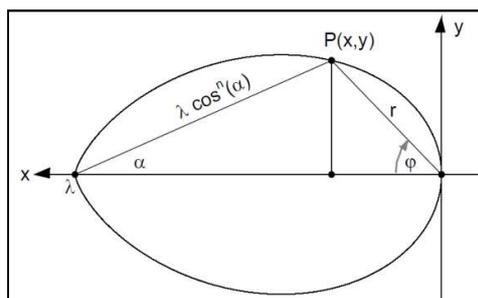
$$y = r \cdot \sin(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

$$0 \leq s < 1$$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$r^2 = \lambda^2 \cdot (\cos^{2n} \alpha - 2s \cdot \cos^{n+1} \alpha + s^2), \quad \sin \varphi \cdot (\cos^{n+1} \alpha - s) = \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos^n \alpha. \quad (84c,d)$$

6.2. Spiegelung an der Geraden $x = \lambda/2$



$$\left[(\lambda - x)^2 + y^2 \right]^{n+1} = \lambda^2 \cdot (\lambda - x)^{2n}, \quad 0 \leq x \leq \lambda \quad (85a)$$

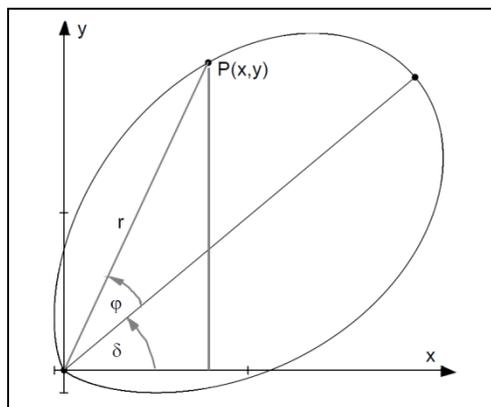
$$x = r \cdot \cos(\varphi) = \lambda - \lambda \cdot \cos^{n+1}(\alpha)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \quad (85b)$$

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$r^2 = \lambda^2 \cdot (\cos^{2n} \alpha - 2 \cdot \cos^{n+1} \alpha + 1), \quad \sin \varphi \cdot (1 - \cos^{n+1} \alpha) = \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos^n \alpha. \quad (85c,d)$$

6.3. Drehung um den Ursprung



Drehwinkel (der Eikurve) : $-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2$.

$$r(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$x(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \cos(\varphi + \delta) \quad (86b)$$

$$y(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi + \delta)$$

$$(x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot (x \cdot \cos \delta + y \cdot \sin \delta)^{2n} \quad (86a)$$

(86a) folgt aus (86b) durch Division der Gleichungen und Elimination von φ mittels des Tangenssatzes:

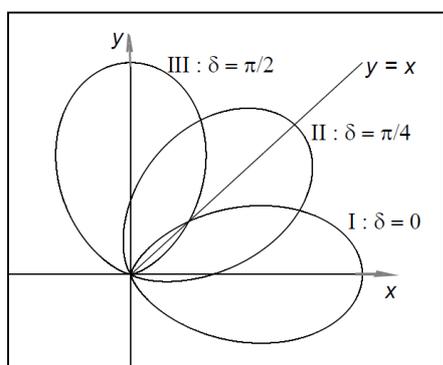
$$\frac{y}{x} = \tan(\varphi + \delta) = \frac{\tan \varphi + \tan \delta}{1 - \tan \varphi \cdot \tan \delta} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{y - x \cdot \tan \delta}{x + y \cdot \tan \delta},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi = 1 + \frac{(y \cdot \cos \delta - x \cdot \sin \delta)^2}{(x \cdot \cos \delta + y \cdot \sin \delta)^2} = \dots = \frac{x^2 + y^2}{(x \cdot \cos \delta + y \cdot \sin \delta)^2},$$

$$(86b) \Rightarrow x^2 + y^2 = \lambda^2 \cdot (\cos^2 \varphi)^n \Rightarrow (86a).$$

Die um δ und $\delta' = \pi/2 - \delta$ gedrehten Eikurven sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt. Die Koordinaten des Spiegelpunktes P' ergeben sich aus den Koordinaten von P durch die Substitutionen $\delta \Rightarrow \pi/2 - \delta = \delta'$ und $\varphi \Rightarrow -\varphi = \varphi'$.

Es gibt drei besondere Lagen der $Ek(n)$.

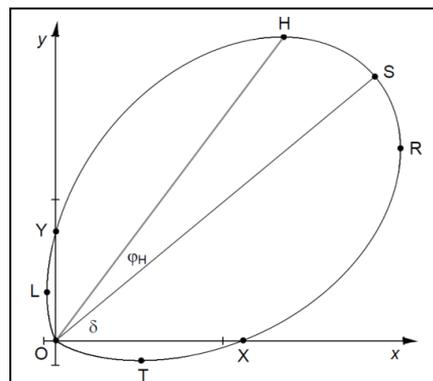


- I: $\delta = 0$ $(x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot x^{2n}$
Normallage
- II: $\delta = \pi/4$ $2^n \cdot (x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot (x + y)^{2n}$
Symmetrie zur Winkelhalbierenden $y = x$
- III: $\delta = \pi/2$ $(x^2 + y^2)^{n+1} = \lambda^2 \cdot y^{2n}$
Spiegelung von I an der Winkelhalbierenden, Vertauschung der Achsen.

Wir ermitteln die Koordinaten ausgewählter Punkte.

Das sind

1. die Scheitelpunkte $O(0,0)$ und $S(x_S, y_S)$,
2. die Achsenschnittpunkte $X(x_X, 0)$ und $Y(0, y_Y)$,
3. die Extrempunkte $H(x_H, y_H)$ und $T(x_T, y_T)$ und
4. die Grenzpunkte $L(x_L, y_L)$ und $R(x_R, y_R)$.



Offensichtlich gelten für die Scheitel- und Achsenschnittpunkte

$$1. \varphi_S = 0, \quad x_S = \lambda \cdot \cos \delta, \quad y_S = \lambda \cdot \sin \delta, \quad \overline{OS} = \lambda \tag{86-1}$$

$$2. \varphi_X = -\delta, \quad x_X = \lambda \cdot \cos^n \delta, \quad y_X = 0 \tag{86-2}$$

$$\varphi_Y = \pi/2 - \delta, \quad x_Y = 0, \quad y_Y = \lambda \cdot \sin^n \delta.$$

Die Koordinaten der Extrempunkte erfüllen die Forderung $\frac{d}{d\varphi} y(\varphi) = 0$. Wird der singuläre Punkt O ignoriert, d.h. $\cos(\varphi) \neq 0$, so ergeben sich für φ_H, φ_T die Bestimmungsgleichungen

$$3. n \cdot \tan(\varphi) \cdot \tan(\varphi + \delta) = 1 \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \tan^2 \varphi + (n + 1) \cdot \tan \delta \cdot \tan \varphi - 1 = 0 \tag{86-3}$$

(Verwende das Additionstheorem des Tangens).

Anmerkung: Mit $\tau = -\delta$ sind die Gleichungen (86-3) und (56) äquivalent!

Mit Hilfe der o.g. Spiegelung an der Winkelhalbierenden ergeben sich aus H und T die Grenzpunkte R und L und nach Substitution der Winkel die Gleichungen für φ_R, φ_L

$$4. \quad n \cdot \tan(\varphi) \cdot \cot(\varphi + \delta) = -1 \quad \text{bzw.} \quad n \cdot \tan^2 \varphi - (n+1) \cdot \cot \delta \cdot \tan \varphi - 1 = 0. \quad (86-4)$$

Nach dem Wurzelsatz von VIETA folgt aus (86-3)

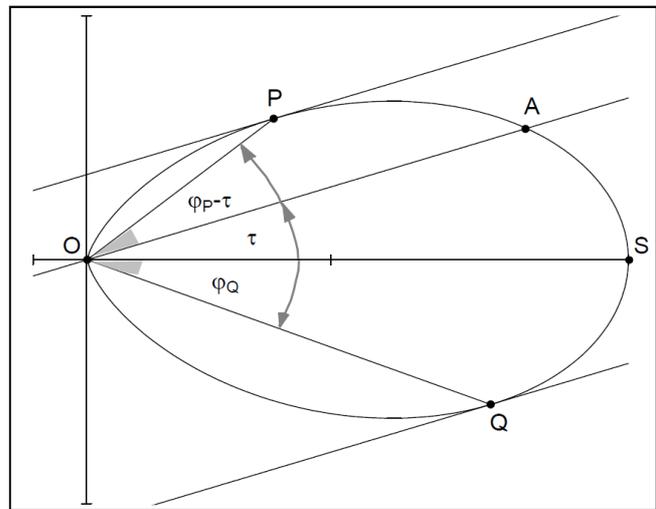
$$\tan(\varphi_H) \cdot \tan(\varphi_T) = -1/n, \quad \tan(\varphi_H) + \tan(\varphi_T) = -(n+1)/n \cdot \tan \delta \quad \text{und in den Tangenssatz eingesetzt schließlich} \quad \tan(\varphi_H + \varphi_T) = -\tan \delta = \tan(-\delta), \quad \text{d.h.} \quad \underline{\varphi_H + \varphi_T = -\delta}. \quad (86-5)$$

Mit $\varphi_R = -\varphi_H, \varphi_L = -\varphi_T$ und $\delta \Rightarrow \pi/2 - \delta$ folgt analog $\underline{\varphi_R + \varphi_L = \pi/2 - \delta}$.

Das liefert folgende geometrische Interpretation, (deute z.B. $\tau = -\delta, P = H, Q = T, A = X$):

Berühren zwei Parallelen mit dem Anstieg $m = \tan \tau$ die Ek(n) in den Punkten P und Q und schneidet eine dritte Parallele durch O die Ek(n) in A, so sind die Winkel $\angle SOQ = \angle AOP$.

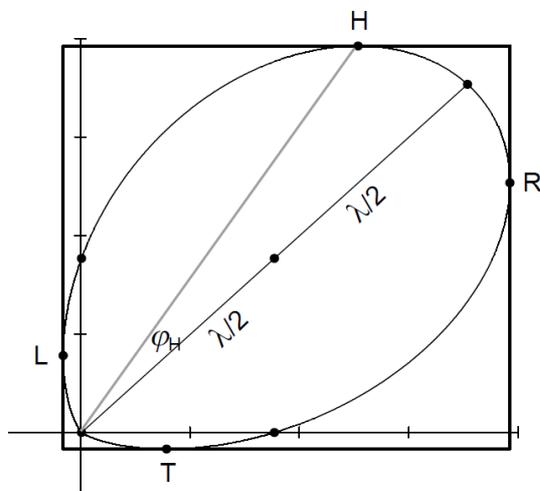
$$\underline{\varphi_Q = \tau - \varphi_P} \quad (86-5)$$



6.4. Die Ek(3) in Symmetrielage zur Winkelhalbierenden $y = x$

Wir betrachten die Ek(3) für den Drehwinkel $\delta = \pi/4$: $\underline{2\sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2)^2 = \lambda \cdot (x + y)^3}$.

Die Formeln (86) liefern für die ausgewählten Punkte folgende Werte:



Scheitelkoordinaten: $x_S = y_S = \lambda/\sqrt{2}$

Achsenabschnitte: $x_X = y_Y = y_S/2$

Winkel der Extrempunkte:

$$3 \cdot \tan^2(\varphi_H) + 4 \cdot \tan(\varphi_H) - 1 = 0$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{1}{3}(\sqrt{7} - 2)\right) \approx 12,148^\circ$$

$$\varphi_T = -45^\circ - \varphi_H \approx -57,148^\circ$$

Koordinaten der Extrempunkte:

$$y_{R,L} = x_{H,T} = \lambda \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot (15 \pm 3\sqrt{7})}{64}$$

$$x_{R,L} = y_{H,T} = \lambda \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot (17 \pm 7\sqrt{7})}{64}. \quad (87)$$

$$A_{\text{Quadrat}} = (y_H - y_T)^2 = \lambda^2 \cdot \frac{343}{512}.$$

Wir führen die Berechnungen für H näher aus.

Mit $\tan \varphi_H = (\sqrt{7} - 2)/3$ und $\cos^2 \varphi_H = 1/(1 + \tan^2 \varphi_H) = (\sqrt{7} + 5)/8$ folgt

$$\begin{aligned} x_H &= \lambda \cdot \cos^3 \varphi_H \cdot \cos(\varphi_H + \pi/4) = \lambda \cdot \cos^3 \varphi_H \cdot (\cos \varphi_H - \sin \varphi_H) \cdot \sqrt{2}/2 \\ &= \lambda \cdot \cos^4 \varphi_H \cdot (1 - \tan \varphi_H) \cdot \sqrt{2}/2 = \lambda \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} + 15)/64 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda \cdot \cos^3 \varphi_H \cdot \sin(\varphi_H + \pi/4) = \lambda \cdot \cos^3 \varphi_H \cdot (\cos \varphi_H + \sin \varphi_H) \cdot \sqrt{2}/2 \\ &= \lambda \cdot \cos^4 \varphi_H \cdot (1 + \tan \varphi_H) \cdot \sqrt{2}/2 = \lambda \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot (7\sqrt{7} + 17)/64 . \end{aligned}$$

Die weiteren Werte in (87) ergeben sich analog bzw. aus der Symmetrielage der Kurve.

6.5. Weitere Parameterdarstellungen

1. Die „natürliche“ Parameterdarstellung mit dem Richtungswinkel φ .

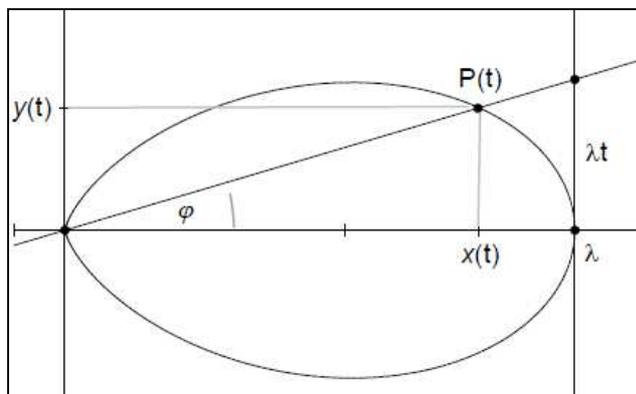
Bisher verwendeten wir für die $Ek(n)$ die aus (1) folgende Parameterdarstellung (2).

$$Ek(n): \quad x(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi), \quad y(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 .$$

Für die erweiterte Eikurve $EK(n)$ wurde diese Darstellung etwas geändert, vgl. (59).

$$EK(n): \quad x(\varphi) = \lambda \cdot \sqrt{\cos^{2n}(\varphi)} \cdot \cos(\varphi), \quad y(\varphi) = \lambda \cdot \sqrt{\cos^{2n}(\varphi)} \cdot \sin(\varphi), \quad -\infty < \varphi < \infty .$$

2. Parameter $t = \tan \varphi$.



$$\begin{aligned} Ek(n): \quad &-\infty < t < \infty, \\ &x(t) = \frac{\lambda}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \\ &y(t) = t \cdot x(t) = \frac{\lambda \cdot t}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (88) \\ &r(t) = \frac{\lambda}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

Für rationale Parameterwerte $t := p/q$, (p, q ganzzahlig), ist (88) wie folgt darstellbar:

$$x\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\lambda \cdot q^{n+1}}{(p^2 + q^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad y\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\lambda \cdot p \cdot q^n}{(p^2 + q^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (88a)$$

Ist λ rational, so erhalten wir mit (88a) stets rationale Punktkoordinaten, wenn n ungerade ist. Ist hingegen n gerade, so müssen p und q zu einem pythagoreischen Tripel gehören.

Diese Unterscheidung ist nicht notwendig in der nachfolgenden (bekannten) Parameterwahl, die für rationale t und λ stets *rationale Kurvenpunkte*, d.h. rationale Punktkoordinaten, liefert.

3. Parameter $t = \tan(\varphi/2)$. $Ek(n): -1 \leq t \leq 1$,

$$r(t) = \frac{\lambda \cdot (1-t^2)^n}{(1+t^2)^n}, \quad x(t) = \frac{\lambda \cdot (1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)^{n+1}}, \quad y(t) = \frac{2\lambda \cdot t \cdot (1-t^2)^n}{(1+t^2)^{n+1}}. \quad (89)$$

Des Weiteren verweisen wir hier schon auf

4. die dem Winkel φ zugeordnete Bogenlänge b als Parameter.

Die Behandlung erfolgt in einem späteren Kapitel, das u. a. auch eine Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen enthält.

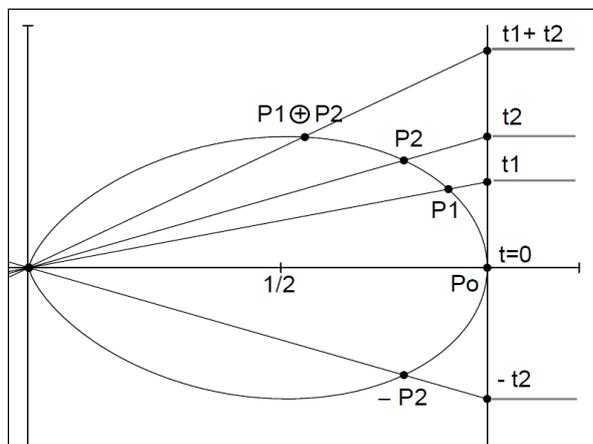
6.6. „Addition“ von Punkte auf der Ovoide Ek(3)

Wir verwenden die Parameterdarstellung **2.**, um auf der Einheits-Ovoide (mit $\lambda = 1$) eine geometrische „Addition“ von Kurvenpunkten zu definieren.

Sei $P(t)$ der Punkt mit den Koordinaten $x(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$, $y(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$. Der Ursprung O wird damit ausgeschlossen.

Wir definieren die Summe zweier Punkte $P(t_1) \oplus P(t_2) := P(t_1 + t_2)$. (90)

In der Abbildung ist Konstruktion der Summe dargestellt.



$$t_1 = \tan(12^\circ) \approx 0,213 \quad , \quad t_2 = \tan(18^\circ) \approx 0,325$$

$$[t_1 + t_2 \approx 0,538 \approx \tan(28,26^\circ)]$$

$$x(t_1) = \frac{1}{(1+t_1^2)^2} \approx 0,915 \quad , \quad x(t_2) \approx 0,818$$

$$y(t_1) = t_1 \cdot x(t_1) \approx 0,195 \quad , \quad y(t_2) \approx 0,266$$

$$x(t_1 + t_2) = \frac{1}{(1+(t_1+t_2)^2)^2} \approx 0,602$$

$$y(t_1 + t_2) = \frac{t_1 + t_2}{(1+(t_1+t_2)^2)^2} \approx 0,324$$

Offensichtlich übertragen sich die Eigenschaften der additiven Gruppe der reellen Zahlen t auf die Punktaddition. Die Addition ist assoziativ und kommutativ:

$$(P_1 \oplus P_2) \oplus P_3 = P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3), \quad P_1 \oplus P_2 := P_2 \oplus P_1.$$

$Po := P(0)$ bzw. $-P(t) := P(-t)$ sind der neutrale bzw. entgegengesetzte Punkt. Wir setzen

$$P_1 \ominus P_2 := P_2 \oplus (-P_2).$$

Die rationalen Punkte der $Ek(3)$ bilden bzgl. der Vorschrift \oplus eine Untergruppe.

Alle rationalen Punkt der $Ek(3)$ haben die Form: $x\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2}$, $y\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot b^3}{(a^2 + b^2)^2}$.

Ist a, b, c ein pythagoräische Tripel, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$, so ist auch der Radius $r = \overline{OP}$ rational.

$$x(a/b) = b^4/c^4, \quad y(a/b) = a \cdot b^3/c^3, \quad r(a/b) = \sqrt{x^2 + y^2} = b^3/c^3.$$

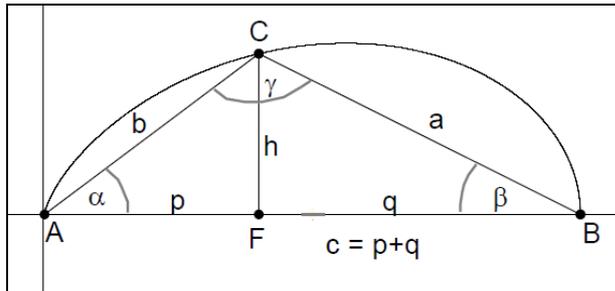
Mit a, b, c ist auch $u := a^2 - b^2$, $v := 2 \cdot a \cdot b$, $w := a^2 + b^2$ ein pythagoräisches Tripel und

$$\text{es gilt } P(a/b) \ominus P(b/a) = P(u/v) \oplus P(u/v) := 2P(u/v).$$

7. Ein- und umbeschriebene Figuren

7.1. Basisdreiecke

Als *Basisdreiecke* bezeichnen wir die der $Ek(n): r = \lambda \cdot \cos^n(\varphi)$ einbeschriebenen Dreiecke mit den Eckpunkten $A(0,0), B(0,\lambda), C(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$, $0 < \varphi < \pi/2$, und verwenden die Bezeichnungen der Abbildung.



$$\underline{\alpha = \varphi, c = \lambda, b = c \cdot \cos^n \alpha}$$

$$a = \lambda \cdot \sqrt{1 + \cos^{2n} \alpha - 2 \cdot \cos^{n+1} \alpha} \quad (=85c)$$

$$\cot \beta = \cot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos^{n+1} \alpha} - 1 \right) \quad (=85d)$$

$$\cot \gamma = \cot \alpha \cdot (\cos^{n-1} \alpha - 1) \quad (91)$$

Formel (91) folgt aus $\cos^n \alpha = b/c = \sin \beta / \sin \gamma = \sin(\alpha + \gamma) / \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \cot \gamma + \cos \alpha$.

Nach (91) ist $\cot \gamma = 0$ falls $n = 1$ und $\cot \gamma < 0$ für $n > 1$, d.h. die Basisdreiecke $\triangle ABC$ sind (wie bekannt) im Halbkreis $Ek(1)$ rechtwinklig und für die $Ek(n > 1)$ stumpfwinklig.

Wir betrachten einige Spezialfälle der Basisdreiecke.

1. Das Dreieck $\triangle ABC_{\max}$ mit maximaler Höhe (und maximalem Flächeninhalt).

Dieser Fall wurde schon im Abschnitt 3.2. behandelt, siehe Formel (11). Wir rekapitulieren

$$\cot(\alpha_{\max}) = \sqrt{n}, p_{\max} = c \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}}, h_{\max} = \frac{p_{\max}}{\sqrt{n}}, A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_{\max}. \quad (= 11)$$

2. Das Dreieck $\triangle ABC^*$ mit maximalem Winkel $\gamma^* = \max \gamma$.

Wir setzen in (91) $z = \cos \alpha$ und $\frac{d}{dz} \frac{z^n - z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{(1-n) \cdot z^{n+1} + n \cdot z^{n-1} - 1}{\sqrt{(1-z^2)^3}} = 0, 0 < z < 1$.

Aus der Bestimmungsgleichung $\underline{(n-1) \cdot z^{n+1} - n \cdot z^{n-1} + 1 = 0}$ folgt $\cos \alpha^* = z, p^*/c = z^{n+1}$.

Die Tabelle enthält einige Lösungen:

n	Gleichung	$\cos \alpha^*$	$\alpha^* \approx$	p^*/c	$\cot \gamma^*$	$\gamma^* \approx$
2	$(z-1) \cdot (z^2 + z - 1) = 0$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ <i>goldener Schnitt</i>	51,83°	$\frac{\sqrt{5}-2}{4} = 0,2360$	-0,3003	106,71°
3	$(z^2-1) \cdot (2 \cdot z^2 - 1) = 0$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	45°	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	116,56°
5	$(z^2-1) \cdot (4 \cdot z^4 - z^2 - 1) = 0$	$\frac{\sqrt{2 \cdot (\sqrt{17} + 1)}}{4}$	36,85°	$\frac{5\sqrt{17} + 13}{128} = 0,2626$	-0,7872	128,21°

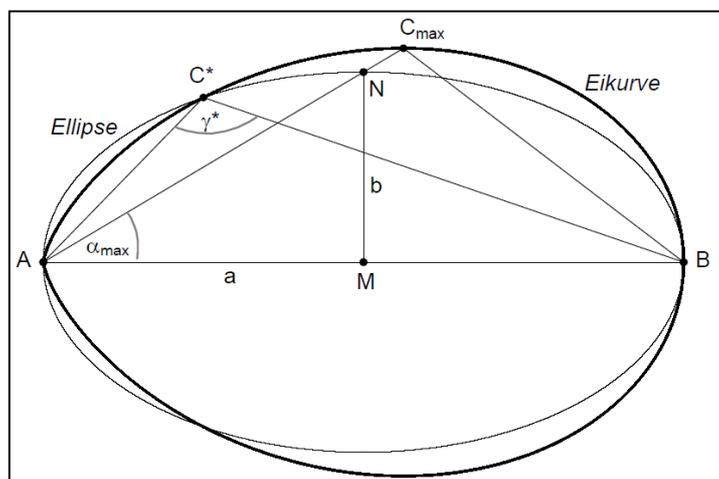
Stellen wir die Bestimmungsgleichung nach n um, so erhalten wir mit $\cos \alpha^* = z$ und (85d)

$$n = \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1 \right) = \cot^2 \alpha^* \cdot \left(\frac{1}{\cos^{n+1} \alpha^*} - 1 \right) = \cot \alpha^* \cdot \cot \beta^* \quad (92a)$$

Daraus folgt wegen $p \cdot q = h \cot \alpha \cdot h \cot \beta$ ein verallgemeinerter Höhensatz für das Dreieck

$$\Delta ABC^* : \quad \underline{p^* \cdot q^* = n \cdot (h^*)^2} . \quad (92b)$$

(92b) führt mit $p^* = x^*$, $q^* = \lambda - x^*$, $h^* = y^*$ auf die Beziehung $n \cdot y^{*2} + x^{*2} - \lambda \cdot x^* = 0$. C^* liegt demnach auch auf der Ellipse $El(n)$: $(x - \lambda/2)^2 + n \cdot y^2 = (\lambda/2)^2$ mit dem Mittelpunkt $M(\lambda/2, 0)$ und den Halbachsen $a = \lambda/2$, $b = (\lambda/2)/\sqrt{n} = \tan(\alpha_{\max}) \cdot \lambda/2$, d.h. der Nebenscheitel N liegt auf der Verbindung $\overline{AC_{\max}}$.



3. Dreiecke mit gleichem Winkel γ

Für $\alpha \rightarrow 0$ und $\alpha = \pi/2$ ist nach (91) $\cot \gamma = 0$. D.h. zwischen A und C^* bzw. C^* und B liegen zu jedem Winkel γ : $\pi/2 < \gamma < \gamma^*$ Punkte C_1 bzw. C_2 mit $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Die zugehörigen Winkel α_1 , α_2 können aus (91) ermittelt werden, was uns auf die folgende Bestimmungsgleichung führt:

$$\underline{z^{2n} - 2 \cdot z^{n+1} + (1+w^2) \cdot z^2 - w^2 = 0}, \quad z := \cos \alpha, \quad w := \cot \gamma \quad (0 > w \geq \cot \gamma^*).$$

Auch hier beschränken wir uns auf Beispiele:

$$\underline{n = 3}. \quad (z^2 - 1) \cdot (z^4 - z^2 - w^2) = 0 \quad \text{hat die relevanten Lösungen} \quad z^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot w^2}}{2}.$$

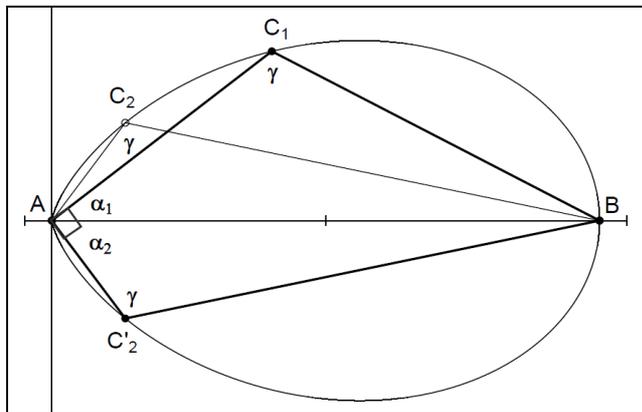
$$\text{Es folgt } \tan^2 \alpha = \frac{1-z^2}{z^2} = \frac{1 \mp \sqrt{1-4 \cdot w^2}}{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot w^2}} = \frac{(1 \mp \sqrt{1-4 \cdot w^2})^2}{4 \cdot w^2} \Rightarrow \underline{\tan \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot \cot^2 \gamma}}{-2 \cdot \cot \gamma}}.$$

Für $\cot \gamma^* = -1/2$ erhalten wir erneut das Ergebnis aus 2.: $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = \tan \alpha^* = 1$.

Schließlich gilt für $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ $\cot(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1 - \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} = 0$, d.h. $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$.

Diese Eigenschaft der $Ek(3)$ kann auch direkt aus (91) abgelesen werden:

$$\cot \gamma = \frac{\cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - 1)}{\sin \alpha} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot (\pi/2 - \alpha)).$$



Im der $Ek(3)$ sind für Basisdreiecke mit komplementen α -Winkeln die γ -Winkel gleich.

$$\underline{\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2} \Leftrightarrow \underline{\gamma_1 = \gamma_2} \quad (93)$$

Eine Verallgemeinerung dieser einprägsamen Eigenschaft auf alle $Ek(n)$ ist nicht möglich, wie das nächste Beispiel zeigt.

$n = 2$.

$$(z-1) \cdot (z^3 - z^2 + w^2 \cdot z + w^2) = 0 \quad \text{bzw.} \quad u^3 + (w^2 - 1/3) \cdot u + (4/3 \cdot w^2 - 2/27) = 0, \quad z := u + 1/3.$$

Wir erhalten drei reelle Lösungen aus $u^3 + p \cdot u + q = 0$ in der bekannten trigonometrischer

Form $u_1 = 2 \cdot \sqrt{|p|/3} \cdot \cos(\delta/3)$, $u_{2,3} = -2 \cdot \sqrt{|p|/3} \cdot \cos(\delta/3 \pm \pi/3)$ mit $\cos \delta = \frac{-q}{2 \cdot \sqrt{|p|/3}}$.

Unter Verwendung des Additionstheorems des Kosinus folgt

$$\underline{\cos \alpha_1 = z_1 = \frac{1}{3} + 2 \cdot s} \quad , \quad \underline{\cos \alpha_{2,3} = z_{2,3} = \frac{1}{3} - s \pm \sqrt{3} \cdot t} \quad ,$$

mit $\cos \delta = \frac{1 - 18 \cdot w^2}{\sqrt{1 - 3 \cdot w^2}^3}$, $s = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2} \cdot \cos\left(\frac{\delta}{3}\right)$, $t = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2} \cdot \sin\left(\frac{\delta}{3}\right)$.

Es folgen zwei Zahlenbeispiele.

Beispiel 1 $\cos \delta := -1$, $\delta = \pi$, $s = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2}$.

$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2}$, d.h. $C_1 = C_2 = C^*$ mit dem Maximalwinkel γ^* .

Wir erhalten w^* entweder aus $(1 - 18 \cdot w^2)^2 = (1 - 3 \cdot w^2)^3$ oder mit $\cos \alpha^*$ nach Abschnitt 2 :

$$3 \cdot (\sqrt{5} - 1) - 2 = 2 \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot w^2} \quad \Rightarrow \quad \cot \gamma^* = w^* = -\sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5} - 11}{2}} \approx -0,3003.$$

Beispiel 2 $\cot^2(\gamma) = w^2 = \frac{1}{18}$, $\cos \delta = 0$, $\delta = \pi/2$, $s = \frac{\sqrt{10}}{12}$, $t = \frac{\sqrt{30}}{36}$.

$\cot \gamma = \frac{-1}{\sqrt{18}}$, $\gamma_{1,2} \approx 103,26^\circ$, $\cos(\alpha_1) = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$, $\alpha_1 \approx 30,64^\circ$, $\cos(\alpha_2) = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 \approx 70,53^\circ$.

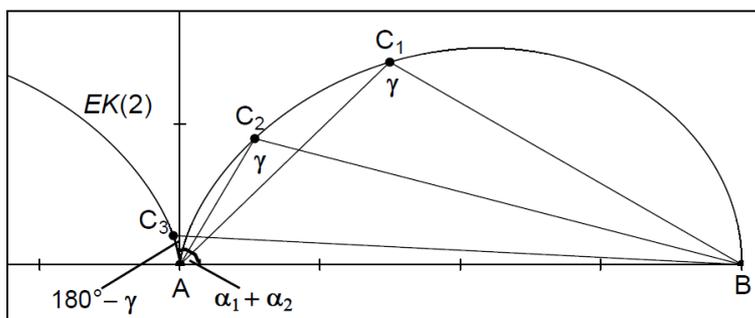
Zusätzlich analysieren wir die dritte (negative) Lösung z_3 , zu der ein positiver w -Wert gehört :

$\cot \gamma = \frac{+1}{\sqrt{18}}$, $\gamma_3 = 180^\circ - \gamma_{1,2} \approx 76,74^\circ$, $\cos(\alpha_3) = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$, $\alpha_3 \approx 101,17^\circ$.

Der Punkt C_3 liegt im zweiten Quadranten auf der erweiterten Eikurve $EK(2)$ und der Winkel $\gamma_3 = \angle AC_3B < 90^\circ$ ist der Supplementwinkel zu $\gamma_{1,2}$. Offenbar ist $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$!

Einfachen Umformungen mit den drei $\cos(\alpha_i)$ -Werten des Beispiels bestätigen dies, denn $\cos(\alpha_3 - \alpha_1) = \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1 + \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_1 = -1/6 + 1/2 = 1/3 = \cos \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_2$.

Diese Aussage gilt generell für die $EK(2)$.



$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \Rightarrow \\ \gamma_3 = 180^\circ - \gamma , \quad (94) \\ \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 . \end{aligned}$$

Beweis:

Setze $h := \sqrt{1-3 \cdot w^2}$. Dann gilt $\cos \frac{\delta}{3} = 3 \cdot \frac{a}{h}$, $t^2 + s^2 = \frac{h^2}{9}$ und $\cos \delta = \frac{6 \cdot h^2 - 5}{h^3}$.

Mit $\cos \delta = 4 \cdot \left(\cos \frac{\delta}{3}\right)^3 - 3 \cdot \cos \frac{\delta}{3}$ folgt $h^2 = \frac{108 \cdot s^3 + 5}{9 \cdot s + 6}$. Diese Beziehung muss notwendig zwischen s und $w = \cot \gamma$ erfüllt sein.

Elementare Umformungen²⁵, in denen s als Variable gewählt wird, ergeben die Identität

$$\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_3 - \alpha_2) = (z_1 - z_3 \cdot z_2) - \sqrt{(1-z_3^2) \cdot (1-z_2^2)} = \frac{6 \cdot s + 1}{3 \cdot s + 2} - \sqrt{\frac{(6 \cdot s + 1)^2}{(3 \cdot s + 2)^2}} = 0.$$

Laut Wurzelsatz ist $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -w^2 < 0$, d.h. $z_3 < 0$ und $\cot \gamma_3 = \cot \alpha_3 \cdot (\cos \alpha_3 - 1) = -w > 0$.

Damit ist (94) bewiesen.

4. Basisdreiecke mit maximalen Umfang

Gesucht ist das Basisdreieck $\triangle ABC^o$ mit maximalem Umfang U^o . Mit Blick auf (85c), d.h. $b = c \cdot \cos^n \alpha$ und $a^2 = c^2 \cdot (\cos^{2n} \alpha - 2 \cdot \cos^{n+1} \alpha + 1)$, gilt für den Umfang der Basisdreiecke

$$U = U(z) = b + a + c = c \cdot z^n + c \cdot \sqrt{z^{2n} - 2 \cdot z^{n+1} + 1} + c , \quad z := \cos \alpha , \quad 0 < z < 1.$$

²⁵ Ein Computeralgebra-System erleichtert die Umformungen erheblich.

Notwendig ist für das Maximum $U'(z) = c \cdot z^{n-1} \cdot \left(n + \frac{n \cdot z^n - (n+1) \cdot z}{\sqrt{z^{2n} - 2 \cdot z^{n+1} + 1}} \right) = 0$ bzw. nach der Umformung des Klammersausdrucks $2n \cdot z^{n+1} - (n+1)^2 \cdot z^2 + n^2 = 0$.

Wir betrachten die einfachen Beispiele:

$n = 1$. $2 \cdot z^2 - 1 = 0$. $\cos \alpha^o = z^o = 1/\sqrt{2}$. $\alpha^o = 45^\circ$, $a^o = b^o = c/\sqrt{2} \approx 0,7071 \cdot c$.

$\triangle ABC^o$ ist das gleichschenklige Basisdreieck im Kreis mit $U^o = c \cdot (\sqrt{2} + 1) \approx 2,4142 \cdot c$.

$n = 2$. $4 \cdot z^3 - 9 \cdot z^2 + 4 = (z-2) \cdot (4 \cdot z^2 - z - 2) = 0$. $\cos \alpha^o = z^o = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx 0,8431$.

α^o	a^o	b^o	x^o	y^o	U^o
$\approx 32,53^\circ$	$\frac{17 + \sqrt{33}}{32} \cdot c$ $\approx 0,7108 \cdot c$	$\frac{c}{16} \cdot \sqrt{\frac{473 - 55 \cdot \sqrt{33}}{2}}$ $\approx 0,5538 \cdot c$	$\frac{25 + 9\sqrt{33}}{128}$ $\approx 0,599 \cdot c$	$\frac{1}{64} \sqrt{\frac{927 + 47\sqrt{33}}{2}}$ $\approx 0,382 \cdot c$	$\approx 2,2646 \cdot c$

$n = 3$. $6 \cdot z^4 - 16 \cdot z^2 + 9 = 0$. $\cos \alpha^o = z^o = \sqrt{\frac{8 - \sqrt{10}}{6}} \approx 0,8979$.

α^o	a^o	b^o	x^o	y^o	U^o
$\approx 26,11^\circ$	$\frac{c}{6} \sqrt{\frac{376 - 101\sqrt{10}}{3}}$ $\approx 0,7240 \cdot c$	$\frac{c}{6} \sqrt{\frac{40 - 5\sqrt{10}}{3}}$ $\approx 0,47325 \cdot c$	$\frac{37 - 8\sqrt{10}}{18} c$ $\approx 0,650 \cdot c$	$\frac{c}{18} \sqrt{289\sqrt{10} - 881}$ $\approx 0,319 \cdot c$	$\approx 2,19725 \cdot c$

5. Basisdreiecke mit minimaler Summe der Seitenquadrate

Gesucht ist das Basisdreieck $\triangle ABC^\times$, mit minimaler Summe S^\times der Quadrate der Seiten.

Es gilt $S = S(z) = a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 \cdot (z^{2n} - z^{n+1} + 1)$, $z := \cos \alpha$, $0 < z < 1$.

Offensichtlich ist $S \leq 2c^2$, denn im zulässigen Intervall ist $z^{2n} \leq z^{n+1}$, und für $z \rightarrow 0$ bzw. 1 folgt $S \rightarrow 2c^2$. Für $n = 1$ ist $S = 2c^2$ unabhängig von z , (Satz des Pythagoras).

Sei $n > 1$. Das Minimum folgt aus der Ableitung $S'(z) = 0$, d.h. $(2n \cdot z^{n-1} - (n+1)) \cdot z^n = 0$.

$\Rightarrow \cos \alpha^\times = z^\times = \left(\frac{n+1}{2 \cdot n} \right)^{\frac{1}{n-1}}$, $x^\times = \left(\frac{n+1}{2 \cdot n} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \cdot c$, $S^\times = 2c \cdot \left(c - \frac{n-1}{2 \cdot n} \cdot x^\times \right)$.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die Werte $z^\times \rightarrow 1$, $x^\times \rightarrow \frac{1}{2} \cdot c$, $S^\times \rightarrow \frac{3}{2} \cdot c^2$.

$\triangle ABC^\times$ nähert sich für große n einem gleichseitigen Dreieck an, (mit abnehmender Höhe).

n	z^\times	α	x^\times/c	S^\times/c^2
2	$3/4 = 0,75$	$\approx 41,41^\circ$	$27/64 \approx 0,422$	$229/128 \approx 1,789$
3	$\sqrt{6}/3 \approx 0,816$	$\approx 35,26^\circ$	$4/9 \approx 0,444$	$46/27 \approx 1,704$
4	$\sqrt[3]{5}/2 \approx 0,855$	$\approx 31,24^\circ$	$5 \cdot \sqrt[3]{25}/32 \approx 0,457$	$15 \cdot \sqrt[3]{25}/128 \approx 1,657$
17	$\approx 0,961$	$\approx 16,05^\circ$	$\approx 0,489$	$\approx 1,540$
$n \rightarrow \infty$	$z^\times \rightarrow 1$	$\alpha \rightarrow 0^\circ$	$x^\times \rightarrow 1/2 \cdot c$	$S^\times \rightarrow 3/2 \cdot c^2$

Wir schließen mit einem Vergleich der Lage der Extrempunkte.

Weil mit wachsendem n die Ordinaten aller Kurvenpunkte gegen Null gehen, genügt ein Vergleich der Abszissen.

Da sich sowohl $x_{\max}(n) < x_{\max}(n+1)$ als auch $x^\times(n) < x^\times(n+1)$ abschätzen lassen, wachsen die Folgen monoton gegen $x_{\max}(\infty) = c/\sqrt{e}$ bzw. $x^\times(\infty) = c/2$.

Für **2.** suchen wir Schranken zu den Lösungen von $f2 := (n-1) \cdot z^{n+1} - n \cdot z^{n-1} + 1 = 0$ und setzen dazu $z = u^{\frac{-1}{n+1}}$ ($u > 1$), so dass $f2 = f2(u, n) = u^{-1} \cdot (u-1+n-n \cdot (u^2)^{1/(n+1)})$.

Für alle $n \geq 2$ gilt $f2(5, n) > 0$ und $f2(3, n) < 0$, d.h. $\frac{c}{5} < x^*(n) = c \cdot z^*(n)^{n+1} < \frac{c}{3}$.

Zu jedem n kann aus $f2(u, n) = 0$ (statt grober Schranken) die Lösung $u(n)$ ermittelt werden.

Für $n \rightarrow \infty$ folgt mit dem Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(u^2)^{1/(n+1)}}{1/n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(u^2)^x}{x} = -\ln(u^2)$ die Gleichung $u-1-2 \cdot \ln(u) = 0$ mit der Lösung $u(\infty) \approx 3,51286$, $x^*(\infty) = c \cdot u(\infty)^{-1} \approx 0,28467 \cdot c$.

Es gilt $b^*(\infty) = x^*(\infty) < c$, $a^*(\infty) = c - x^*(\infty)$ und folglich $\gamma^*(\infty) = 180^\circ$.

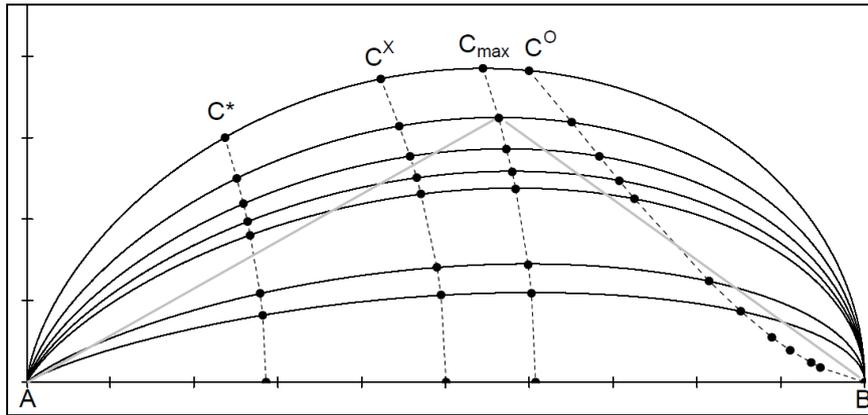
Analog ermitteln wir für **4.** mit $f4 := 2 \cdot z^{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n} z^2 + n = 0$, $z = u^{\frac{-1}{n+1}}$ und $n \rightarrow \infty$ die Gleichung $2/u - 2 \cdot \ln(u) - 2 = 0$ mit der Lösung $u(\infty) = 1$, $x^o(\infty) = c \cdot u(\infty)^{-1} = c$.

Zusammenfassend:

$n \geq 2 \Rightarrow$ monoton wachsende $x(n)$ (Nachweise z. T. übergangen)

$$\left| \begin{array}{l} c \cdot (\sqrt{5} - 2) \approx 0,236 \cdot c \leq x^*(n) < x^*(\infty) \approx 0,2847 \cdot c, \\ c \cdot 27/64 \approx 0,422 \cdot c \leq x^\times(n) < x^\times(\infty) = 0,5 \cdot c, \\ c \cdot \sqrt{8/27} \approx 0,544 \cdot c \leq x_{\max}(n) < x_{\max}(\infty) = c/\sqrt{e} \approx 0,607 \cdot c, \\ x^o(2) \approx 0,599 \cdot c \leq x^o(n) < x^o(\infty) = c. \end{array} \right. \quad (95)$$

Einen Überblick liefert die nachfolgende Grafik.



- $C^* : \gamma = \max$
- $C^X :$
- $a^2 + b^2 + c^2 = \min$
- $C_{\max} : h = \max$
- $C^O :$
- $a + b + c = \max$

7.2. Einbeschriebene gleichseitige Dreiecke

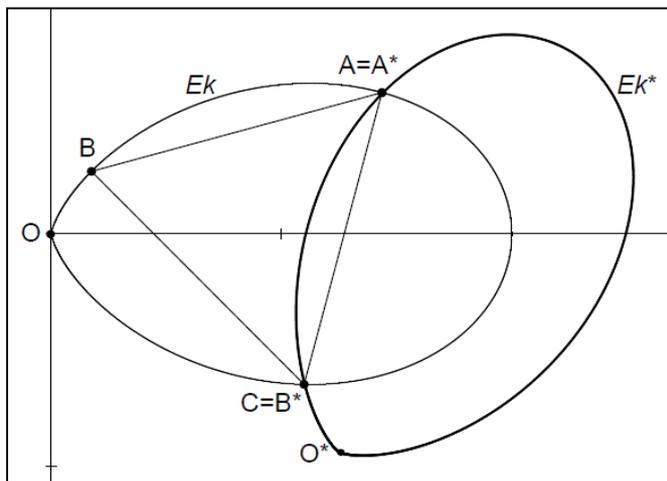
Der $Ek(n)$ können gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden. Genauer gilt:

| Jeder Punkt der Eikurve ist Eckpunkt eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. |

Wir überzeugen uns von der Aussage durch folgende Überlegung.

Auf der $Ek(n)$ wählen wir einen beliebigen Punkt A als Drehpunkt und drehen die $Ek(n)$ positiv um 60° . Das Bild bezeichnen wir mit $Ek^*(n)$. Jeder Punkt P der $Ek(n)$ geht dabei in einen Punkt P^* der $Ek^*(n)$ über. Die beiden Kurven schneiden sich in den Punkten $A = A^*$ und $C = B^*$. Der Punkt B^* ist das Bild eines Punkte B der $Ek(n)$.

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichseitig, denn $|AC| = |AB|$ und $\angle BAC = 60^\circ$.



$$\begin{aligned}
 &Ek(n): \\
 &\begin{cases} x(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1} \varphi \\ y(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot \sin \varphi \end{cases} \\
 &Ek^*(n): \\
 &\begin{cases} x^*(\varphi) - x(\varphi_A) = x_0(\varphi) - x_0(\varphi_A) \\ y^*(\varphi) - y(\varphi_A) = y_0(\varphi) - y_0(\varphi_A) \end{cases} \quad (96) \\
 &\text{mit} \\
 &\begin{cases} x_0(\varphi) := \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot \cos(\varphi + \pi/3) \\ y_0(\varphi) := \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot \sin(\varphi + \pi/3) \end{cases} \\
 &-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2
 \end{aligned}$$

Der Parameter φ ist Richtungsvektor für P , aber nicht für P^* !

Die Formel (96) ist eine Verallgemeinerung der Formel (86b) aus 6.3.. Vor und nach der Drehung erfolgt eine Verschiebung des Punktes O nach A und zurück.

Mit den Ortsvektoren $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und der Drehmatrix $D(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$ beschreibt dies die Vektorgleichung $(P^* - A^*) = D(\delta) \cdot (P - A)$. (96a)

Nach Anwendung der Additionstheoreme folgt mit $A^* = A$ und $\delta = \pi/3$ die Formel (96).

Die Richtungswinkel der Eckpunkte B und C erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} x^*(\varphi_B) = x(\varphi_C) \\ y^*(\varphi_B) = y(\varphi_C) \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} x0(\varphi_B) - x0(\varphi_A) = x(\varphi_C) - x(\varphi_A) \\ y0(\varphi_B) - y0(\varphi_A) = y(\varphi_C) - y(\varphi_A) \end{vmatrix} . \quad (97)$$

Dieses System ist im Allgemeinen nur durch Näherungsverfahren numerisch lösbar.²⁶

So folgt für die $Ek(3)$ bzw. $Ek(5)$ näherungsweise aus (97) für vorgegeben φ_A

$$\begin{aligned} n = 3: & \quad (\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = (0^\circ, 34,87^\circ, -34,87^\circ), (10^\circ, 41,69^\circ, -31,45^\circ), (30^\circ, 90,0^\circ, -30,0^\circ); \\ n = 5: & \quad (\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = (0^\circ, 25,06^\circ, -25,06^\circ), (10^\circ, 31,49^\circ, -23,91^\circ), (30^\circ, 90,0^\circ, -30,0^\circ). \end{aligned}$$

Der Kosinussatz liefert eine allgemeine Formel für die Länge $s = |P_1P_2|$ der Sehne zwischen zwei Punkten auf der $Ek(n)$:

$$|P_1P_2| = s(\varphi_1, \varphi_2, n) = \sqrt{\cos^{2n}(\varphi_1) + \cos^{2n}(\varphi_2) - 2 \cdot \cos^n(\varphi_1) \cdot \cos^n(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot \lambda . \quad (98)$$

Wir erhalten für der o. g. Näherungslösungen die Seitenlängen

$$\begin{aligned} n = 3: & \quad s(0^\circ, 34,87^\circ, 3) \approx 0,6315 \cdot \lambda, \quad s(10^\circ, 41,69^\circ, 3) \approx 0,6394 \cdot \lambda, \quad s(30^\circ, 90^\circ, 3) \approx 0,6495 \cdot \lambda; \\ n = 5: & \quad s(0^\circ, 25,06^\circ, 5) \approx 0,5167 \cdot \lambda, \quad s(10^\circ, 31,49^\circ, 5) \approx 0,5329 \cdot \lambda, \quad s(30^\circ, 90^\circ, 5) \approx 0,4871 \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Kontrollrechnungen bestätigen die Seitengleichheit: $s(\varphi_A, \varphi_B, n) = s(\varphi_A, \varphi_C, n) = s(\varphi_B, \varphi_C, n)$.

Wir wenden uns einigen speziellen Beispielen zu.

1. $\varphi_A := 30^\circ$ mit $\varphi_B = 90^\circ$, $\varphi_C = -30^\circ$ ist aus der Grafik ablesbar.

$$\text{Die Seitenlänge beträgt } s = \cos^n(30^\circ) \cdot \lambda = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot \lambda.$$

2. $\varphi_A := 0^\circ$ und die Symmetriebedingung $\varphi_C = -\varphi_B$ vereinfachen des System (97) :

$$\begin{cases} \cos^n \varphi_B \cdot \cos(\varphi_B + \pi/3) = \cos^n \varphi_B \cdot \cos \varphi_B - 1 + 1/2 \\ \cos^n \varphi_B \cdot \sin(\varphi_B + \pi/3) = \cos^n \varphi_B \cdot (-\sin \varphi_B) + \sqrt{3}/2 . \end{cases}$$

Nach Quadrieren der Gleichungen und ihrer Addition sowie nochmaliger Quadratur entsteht eine algebraische Gleichung für

$$z := \cos \varphi_B : \quad \underline{4 \cdot z^{2n+2} - 3 \cdot z^{2n} - 2 \cdot z^{n+1} + 1 = 0} . \quad (99)$$

Diese Gleichung kann auch aus 6.2. (85) ermittelt werden.

Den aus (99) bestimmten Winkel φ_B bezeichnen wir extra mit φ_0 . Zum Winkel $\alpha = \varphi_0$ gehört der Winkel $\beta = 30^\circ$. Vgl. (85).

Ist $x_0 := x(\varphi_0) = \cos^{n+1}(\varphi_0)$, so beträgt die Seitenlänge $s = (\lambda - x_0)/\cos(30^\circ) = 2(\lambda - x_0)/\sqrt{3}$.

Wir ermitteln aus (99) die (unhandliche) exakte Lösung φ_0 für die $Ek(3)$.

$$\begin{aligned} 4 \cdot z^8 - 3 \cdot z^6 - 2 \cdot z^4 + 1 &= (z^2 - 1) \cdot (4 \cdot z^6 + z^4 - z^2 - 1) = 0 \text{ besitzt die nichttriviale reelle Lösung} \\ z^2 &= \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt[3]{197 + 18 \cdot \sqrt{113}} + \sqrt[3]{197 - 18 \cdot \sqrt{113}} - 1 \right) \approx 0,673136, \quad \varphi_0 = \arccos(\sqrt{z^2}) \approx 34,87027^\circ . \end{aligned}$$

²⁶ Mathcad stellt z. B. die Routine „Suchen“ bereit.

Wird in der obigen Bestimmungsgleichung $z^2 = \sqrt{u}$ gesetzt, so entsteht eine Gleichung für die x-Koordinate $x_0 = x(\varphi_0) = u \cdot \lambda : (u-1) \cdot (16 \cdot u^3 - 9 \cdot u^2 + 3 \cdot u - 1) = 0$.

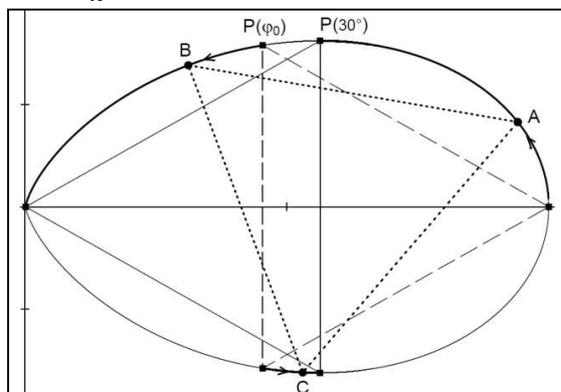
Die betreffende Lösung ist $u = (z^4) = \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{113+83}} - \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{113-83} + 3} \right) \approx 0,453112$.

Die Seitenlänge beträgt $s = 2(\lambda - x_0) / \sqrt{3} \approx 0,631492 \cdot \lambda$.

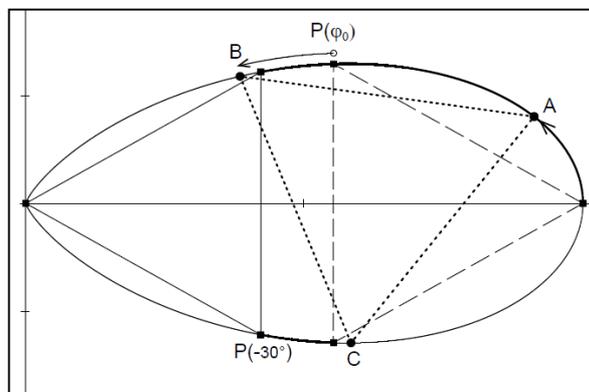
Für eine nähere Analyse der Lage aller einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke ist der Winkel φ_0 von Bedeutung:

Durchläuft φ_A die Winkel von 0° bis 30° , so durchläuft φ_B die Winkel von φ_0 bis 90° ; φ_C ist negativ und erfasst zumindest die Winkel zwischen $-\varphi_0$ und -30° !

Bei Beachtung der Spiegelung an der x-Achse, sind also alle Dreieckslagen durch die Winkel $0^\circ \leq \varphi_A \leq 30^\circ$ bestimmt.



Ek(3) : $\varphi_0 > 30^\circ$.



Ek(5) : $\varphi_0 < 30^\circ$

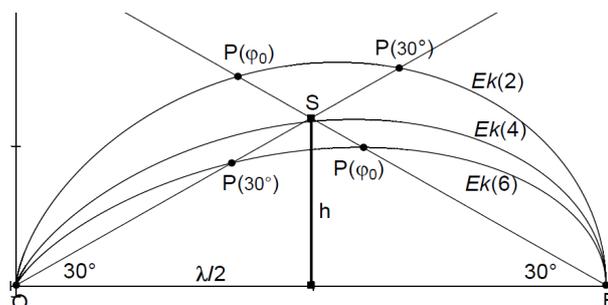
Der Abbildung entnehmen wir, dass für $n > 3$ der Winkel $\varphi_0 < 30^\circ$ ist.

Es ist $h = \tan(30^\circ) \cdot \lambda / 2 = 0,288... \cdot \lambda$.

Aus (11) folgt $y_{\max}(n+1) < y_{\max}(n)$ und

$y_{\max}(4) = \lambda \cdot 16\sqrt{5}/125 = 0,268... \cdot \lambda < h$.

\Rightarrow Die $Ek(n > 3)$ schneiden die Schenkel des Dreiecks $\triangle OES$.



3. Gleichseitiges Dreieck mit maximalem Umfang.

Die Umfänge der gleichseitigen Dreiecke in einer $Ek(n)$ variieren nur geringfügig. Wir ermitteln mit einem numerischen Optimierungsverfahren das einbeschriebene gleichseitige Dreieck mit maximalem Umfang.²⁷ D.h. unter Beachtung der Nebenbedingungen (97) wird $s(\varphi_A, \varphi_B, n) / \lambda$ maximiert.

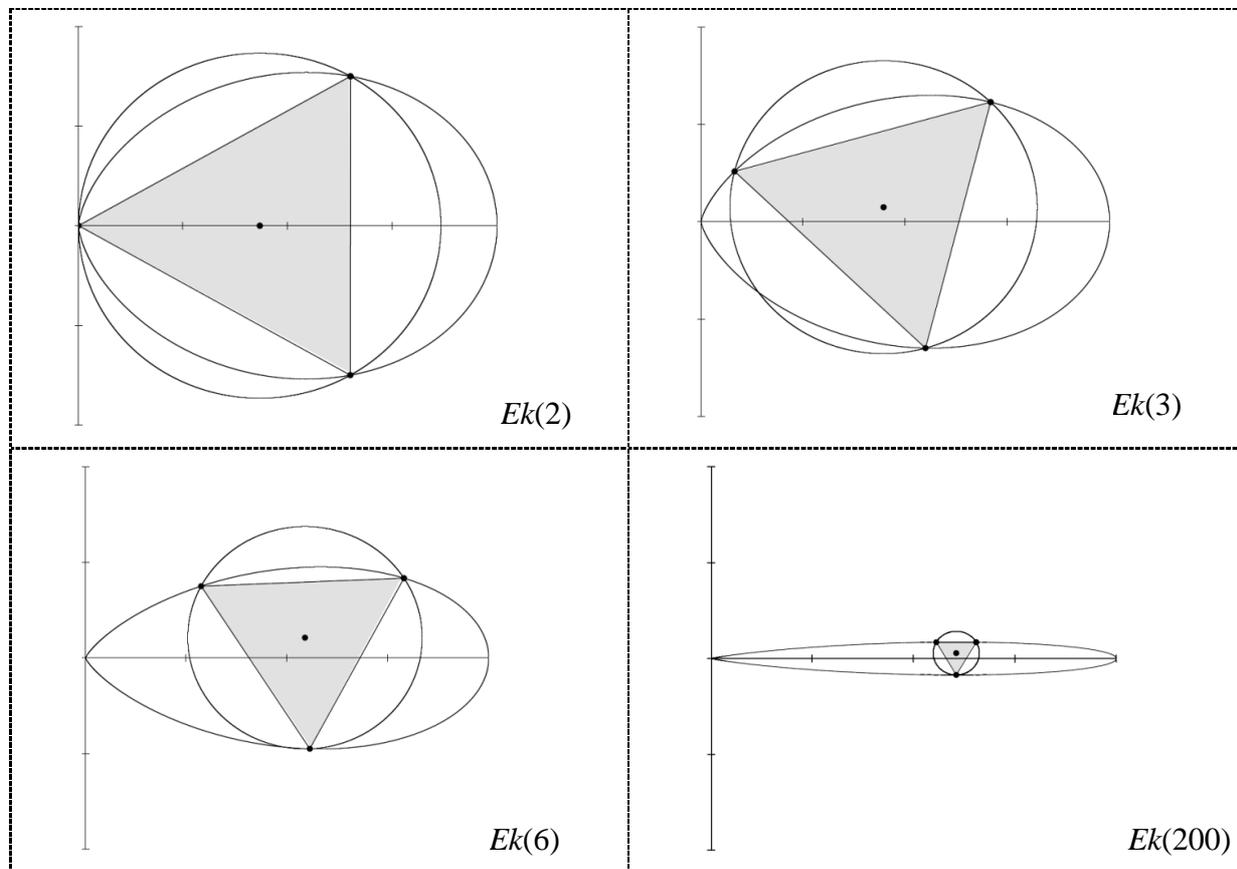
Die Tabelle enthält für einige $Ek(n)$ die Werte der Eckpunkt A, B, C , sowie die Seitenlänge s , den Umkreisradius $r = s / \sqrt{3}$ und Mittelpunkt $M = (A + B + C) / 3$ der maximalen Dreiecke.

²⁷ Mathcad stellt die Routine „Maximieren“ bereit.

$\frac{\lambda := 1}{n}$	φ_A $A(x_A / y_A)$	φ_B $B(x_B / y_B)$	φ_C $C(x_C / y_C)$	s_{\max}	r $M(x_M / y_M)$
1*	0° (1 / 0)	60° (0,25 / 0,433)	-60° (0,25 / -0,433)	0,8660	0,5 (0,5 / 0)
2	30° (0,65 / 0,375)	90° (0 / 0)	-30° (0,65 / -0,375)	0,75	0,433 (0,433 / 0)
3	23,432° (0,71 / 0,31)	57,661° (0,08 / 0,13)	-30,581° (0,55 / -0,33)	0,6516	0,376 (0,45 / 0,04)
4	18,014° (0,78 / 0,25)	43,909° (0,19 / 0,19)	-27,737° (0,54 / -0,29)	0,5874	0,339 (0,51 / 0,51)
5	15,976° (0,79 / 0,23)	37,460° (0,25 / 0,19)	-25,170° (0,55 / -0,26)	0,5405	0,312 (0,53 / 0,05)
6	14,794° (0,79 / 0,21)	33,226° (0,29 / 0,19)	-23,129° (0,56 / -0,24)	0,5036	0,291 (0,54 / 0,05)
...					
200	3,722° (0,65 / 0,04)	4,380° (0,55 / 0,04)	-4,051° (0,61 / -0,04)	0,0986	0,057 (0,605 / 0,03)
∞^{**}	0° (x_∞ / 0)	0° (x_∞ / 0)	0° (x_∞ / 0)	0	0 (x_∞ / 0)

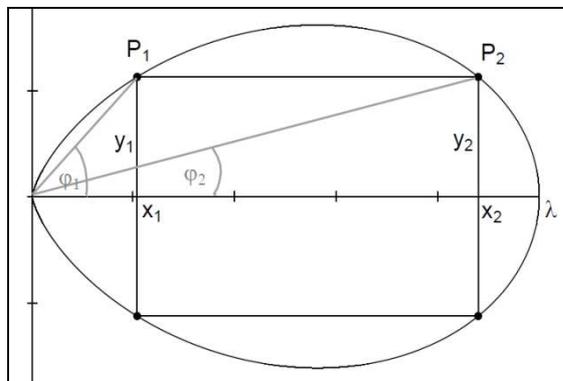
* Alle einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke sind kongruent.

** $x_\infty = 1/\sqrt{e} = 0,6065$. Vgl. S.7 (19).



7.3. Einbeschriebene Rechtecke (numerische Lösungen)

Der $Ek(n)$ werden (seitenparallele) Rechtecke einbeschrieben.



$$Ek(n): \quad y(\varphi) = \lambda \cdot \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

$$x(\varphi) = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi)$$

Nebenbedingungen:

$$y_1 = y(\varphi_1) = y(\varphi_2) = y_2 = y$$

$$0 \leq y \leq y_{\max} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$$

(100)

Gesucht sind die Abmessungen spezieller Rechtecke:

(A1) Ein einbeschriebenes Quadrat. $s = x_2 - x_1 = 2 \cdot y$.

(A2) Ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt. $A = 2 \cdot (x_2 - x_1) \cdot y \Rightarrow \max!$

(A3) Ein Rechteck mit maximalem Umfang. $U = 2 \cdot (x_2 - x_1) + 4 \cdot y \Rightarrow \max!$

Da die Angabe der Lösungen in geschlossener Form begrenzt ist, wenden wir hier bekannte numerische Näherungsverfahren an.²⁸

Unter Beachtung der Nebenbedingung in (100) $\cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 = \cos^n \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2$ werden die Winkel φ_1, φ_2 aus den betreffenden Forderungen ermittelt:

(A1) $\cos^{n+1} \varphi_2 - \cos^{n+1} \varphi_1 = 2 \cdot \cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1$

(A2) $(\cos^{n+1} \varphi_2 - \cos^{n+1} \varphi_1) \cdot 2 \cdot \cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \Rightarrow \max!$

(A3) $2 \cdot (\cos^{n+1} \varphi_2 - \cos^{n+1} \varphi_1) + 4 \cdot \cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 \Rightarrow \max!$

Die nachfolgenden Tabellen enthalten für einige $Ek(n)$ die ermittelten (gerundeten) Werte.

(A1) Einbeschriebenes Quadrat.

n	$\varphi_1/^\circ$	$\varphi_2/^\circ$	x_1/λ	x_2/λ	y/λ	s/λ	A/λ^2	U/λ
1	67,5	22,5	0,1465	0,8536	0,3536	0,7071	0,5	2,8284
2	51,92	19,76	0,2347	0,8335	0,2995	0,5989	0,3587	2,3956
3	43,07	18,04	0,2848	0,8173	0,2663	0,5325	0,2836	2,1300
4	37,29	16,80	0,3187	0,8042	0,2427	0,4854	0,2356	1,9417
5	33,18	15,82	0,3437	0,7932	0,2248	0,4495	0,2021	1,7980
6	30,08	15,02	0,3632	0,7839	0,2104	0,4208	0,1771	1,6831
20	15,34	10,04	0,4669	0,7230	0,1281	0,2561	0,0656	1,0245

$x_{1,2} \rightarrow \lambda/\sqrt{e} = 0,6065 \cdot \lambda$, vgl. S.7 (19). $y \rightarrow y_{\max} \rightarrow 0$. $s \rightarrow 0$.

²⁸ Siehe Fußnoten 26 und 27.

(A2) Rechteck mit maximaler Fläche.

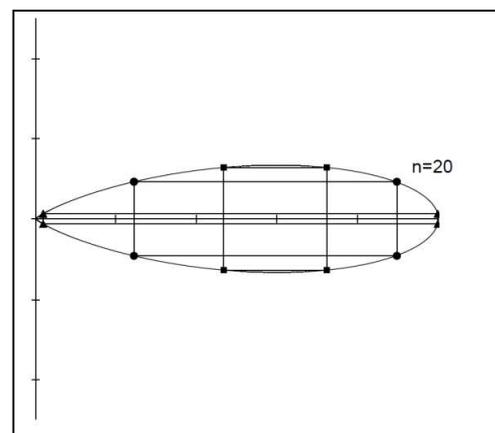
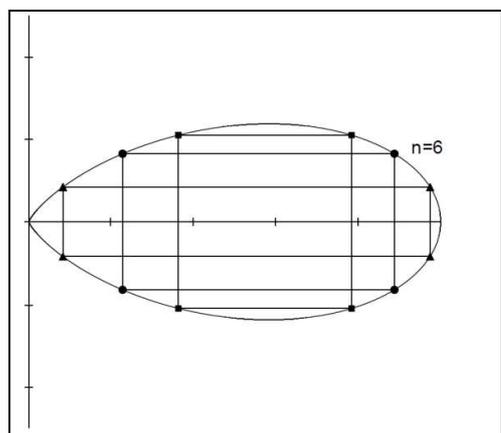
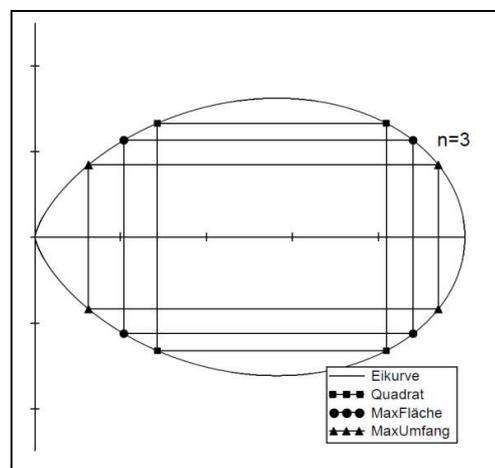
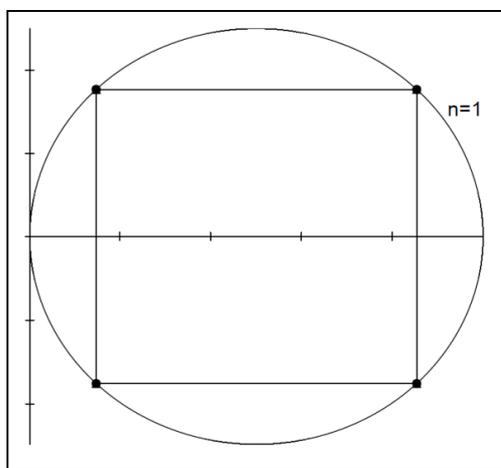
n	$\varphi_1/^\circ$	$\varphi_2/^\circ$	x_1/λ	x_2/λ	y/λ	s/λ	A_{\max}/λ^2	U/λ
1	67,5	22,5	0,1465	0,8536	0,3536	0,7071	0,5	2,8284
2	55,01	17,17	0,1887	0,8722	0,2695	0,6835	0,3684	2,4449
3	47,60	14,44	0,2068	0,8796	0,2264	0,6728	0,3047	2,2513
4	42,60	12,70	0,2168	0,8835	0,1991	0,6667	0,2655	2,1298
5	38,84	11,47	0,2232	0,8860	0,1798	0,6628	0,2383	2,0446
6	35,96	10,54	0,2277	0,8877	0,1652	0,6601	0,2180	1,9808
20	20,76	5,91	0,2443	0,8940	0,0926	0,6497	0,1203	1,6698

$x_1 \rightarrow \approx 0,252 \cdot \lambda$, $x_2 \rightarrow \approx 0,897 \cdot \lambda$. $y \rightarrow \approx 0,690 \cdot y_{\max} \rightarrow 0$. $A_{\max} \rightarrow 0$. Siehe unten 7.4. !

(A3) Rechteck mit maximalem Umfang.

n	$\varphi_1/^\circ$	$\varphi_2/^\circ$	x_1/λ	x_2/λ	y/λ	s/λ	A/λ^2	U_{\max}/λ
1	67,5	22,5	0,1465	0,8536	0,3536	0,7071	0,5	2,8284
2	58,62	14,27	0,1412	0,9103	0,2315	0,7691	0,3561	2,4641
3	53,54	10,20	0,1247	0,9383	0,1688	0,8137	0,2746	2,3023
4	50,10	7,74	0,1085	0,9553	0,1298	0,8467	0,2199	2,2128
5	47,54	6,11	0,0947	0,9664	0,1034	0,8718	0,1803	2,1573
6	45,52	4,95	0,0829	0,9742	0,0844	0,8913	0,1504	2,1202
20	34,19	0,73	0,0186	0,9983	0,0126	0,9797	0,0248	2,0100

$x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow \lambda$. $y \rightarrow 0$. $U_{\max} \rightarrow 2 \cdot \lambda$.



7.4. Einbeschriebene Rechtecke (Approximation für große n)

Die numerischen Näherungslösungen für die flächenmaximalen Rechtecke lassen vermuten, dass deren Abszissen $x_{1,2}$ mit wachsendem n Grenzwerten *innerhalb* des Intervalls $(0,\lambda)$ zustreben. Zur genaueren Untersuchung wählen wir für die Eikurve $Ek(n)$ eine geeignete Näherungsfunktion. Vereinfachend setzen wir den Maßstabfaktor $\lambda=1$. Es gilt für $0 < x \leq 1$

$$y^2 = x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{-2 \cdot \ln(x)}{n+1} + \frac{2 \cdot (1-x)^2}{x \cdot (n+1)^2} + \frac{4 \cdot (1-x)^3}{3 \cdot (n+1)^3} + O\left[\frac{(1-x)^4}{(n+1)^2}\right] \right). \quad (101)$$

Zu Nachweis wird links die Reihenentwicklung von $x^{\frac{-2}{n+1}} - 1$ eingesetzt

$$x^{\frac{-2}{n+1}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{-2/(n+1)}{k} \cdot (1-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (2+1 \cdot (n+1)) \cdot \dots \cdot (2+(k-1) \cdot (n+1))}{k! \cdot (n+1)^k} \cdot (1-x)^k;$$

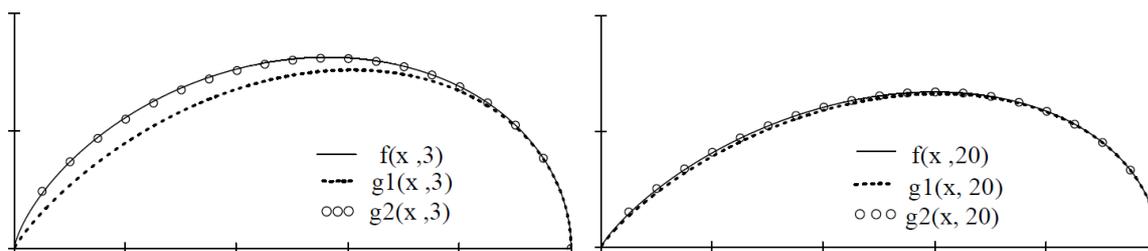
rechts werden die Reihenentwicklung $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} (1-x)^k$ und $\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$ benutzt.

Aus (101) erhalten wir für die $Ek(n, \lambda=1)$ mit den zwei ersten Klammersummanden eine sehr gute Näherungsfunktion (schon für kleine n).

$$y := g2(x,n) = x \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln(x)}{n+1} + \frac{2 \cdot (1-x)^2}{x \cdot (n+1)^2}} \quad g2(x,n) \approx f(x,n) = \sqrt{x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2}. \quad (102a)$$

Für unsere Untersuchung ($n \rightarrow \infty$) ist jedoch die einfache Näherung geeigneter

$$y := g1(x,n) = x \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln(x)}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{-x^2 \cdot \ln(x^2)}. \quad g1(x,n) \rightarrow f(x,n). \quad (102b)$$



Wir ermitteln für $y = g1(x,n)$ die Koordinaten des einbeschriebenen maximalen Rechtecks.

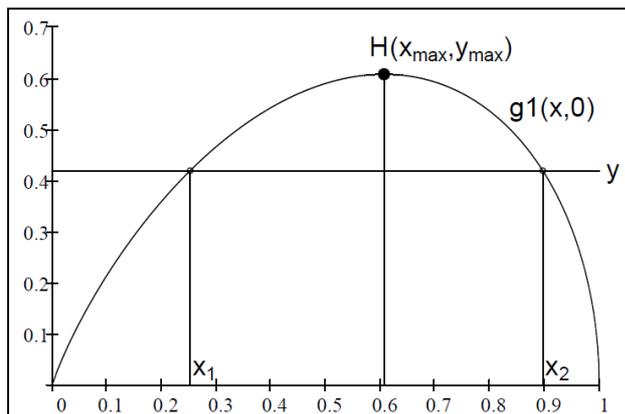
Es genügt, die Werte für $y = g1(x,0)$ zu bestimmen, denn wegen $g1(x,n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot g1(x,0)$

werden die Ordinaten für gleiche Abszissen im festen Verhältnis $1 : \sqrt{n+1}$ verkürzt.

Es bleibt damit auch das das Verhältnis der Rechteckfläche zur Gesamtfläche für alle n gleich.

Bezeichnen $x_{m,1}(n)$, $x_{m,2}(n)$ und $y_m(n)$ die Eckkoordinaten des maximalen Rechtecks, so gilt

$x_{m,1,2}(n) = x_{m,1,2}(0)$ und $y_m(n) : y_m(0) = 1 : \sqrt{n+1}$. Ist $y_{\max}(n)$ das Maximum von $y = g1(x,n)$, so gilt entsprechend $x_{\max}(n) = x_{\max}(0)$ und $y_m(n) : y_{\max}(n) = y_m(0) : y_{\max}(0) = const. .$



$$y = g1(x,0) = x \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(x)} \quad (102c)$$

$$\frac{d}{dx} y = \sqrt{-2 \cdot \ln(x)} - \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot \ln(x)}} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{\max} = 1/\sqrt{e} \approx 0,6065, \quad y_{\max} = 1/\sqrt{e} = x_{\max}$$

Nach (102b) konvergiert für die $Ek(n)$ der x -Wert des Maximums: $x \rightarrow \lambda/\sqrt{e}$.

(Formel 19 !)

Werden zu vorgegebenem y in (102c) die x -Werte gesucht, so erfolgt die Auflösung der Gleichung (102c) nach x mit Hilfe der *Lambert-W-Funktion*.²⁹

Die Lambert-W-Funktion $v = W(u)$ ist die Inverse der Funktion $u = f(v) = v \cdot e^v$.

Sie besitzt zwei (reelle) Zweige:

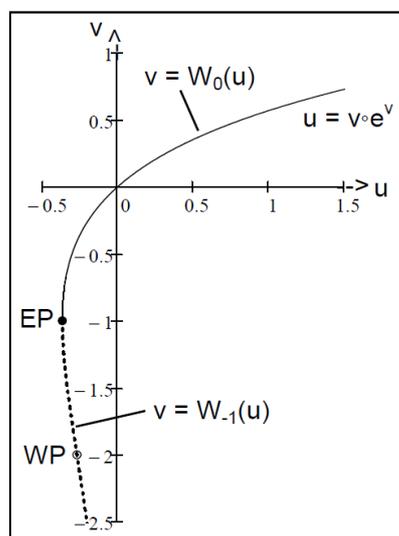
$$v = W_0(u) \quad -1/e \leq u < \infty, \quad W_0(u) \geq -1$$

$$v = W_{-1}(u) \quad -1/e < u < 0, \quad W_{-1}(u) < -1.$$

$EP(-1/e, -1)$ und $WP(-2/e^2, -2)$ sind die Extrem- und Wendepunkte der Kurve.

Die W -Funktion steht in den größeren CAS-Systemen zur Verfügung,

(z.B. *Mathematica*®, *Maple*®, z.T. *Mathcad*®).



Gleichung (102c) wird umgeformt: $-y^2 = x^2 \cdot \ln(x^2) = e^v \cdot v$ mit $v := \ln(x^2) = W(-y^2)$! Also gilt $-y^2 = x^2 \cdot \ln(x^2) = x^2 \cdot W(-y^2)$. Da y im Intervall $0 < y < y_{\max} = 1/\sqrt{e}$ liegt, sind beide W -Zweige Lösungen für (102c):

$$y = x \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(x)} \Rightarrow x_2^2 = \frac{-y^2}{W_0(-y^2)}, \quad x_1^2 = \frac{-y^2}{W_{-1}(-y^2)}. \quad (102d)$$

Wir beantworten jetzt die eingangs gestellte Vermutung, indem durch Intervallschachtelung und CAS jener y -Wert ermittelt wird, für den das Produkt $A(y) = (x_2 - x_1) \cdot y$ maximal wird.

$$A(y) = y \cdot \left(\sqrt{\frac{-y^2}{W_0(-y^2)}} - \sqrt{\frac{-y^2}{W_{-1}(-y^2)}} \right)$$

Mathcad 14.0 --->

y	$A(y)$
0,41830	0,269826940
0,41835	0,269826959
0,41840 *	0,269826965 *
0,41845	0,269826957
0,41850	0,269826935

²⁹ ERIC W. WEISSTEIN; CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, CRC Press Florida(USA) 1999. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche_W_Funktion.

Zusammenfassend: $y_m(0) = 0,41840\dots$, $x_{m1}(0) = 0,25200\dots$, $x_{m2}(0) = 0,8969\dots$,
 $A_m(0) = 0,2698\dots$, $y_m(0): y_{\max}(0) = 0,6898\dots$

Entsprechend konvergieren für die $Ek(n)$ die Werte des Rechtecks mit maximaler Fläche:

$$n \rightarrow \infty : \quad x_1 \rightarrow 0,2520 \cdot \lambda, \quad x_2 \rightarrow 0,8969 \cdot \lambda, \quad y \rightarrow 0,6898 \cdot y_{\max} \rightarrow 0.$$

Aus der Fläche und dem Rotationsvolumen von $y = g1(x,0)$ können analog Näherungswerte für die $Ek(n)$ gewonnen werden.³⁰

$$A(0) = \sqrt{2} \int_0^1 x \cdot \sqrt{\ln(1/x)} \, dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad V_x(0) = 2\pi \int_0^1 x^2 \ln(1/x) \, dx = 2\pi \frac{1}{9} \Gamma(2) = \frac{2\pi}{9}.$$

$$Ek(n): \quad A_{näh}(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{n+1}} \cdot \lambda^2, \quad V_{xnäh}(n) = \frac{2\pi}{9 \cdot (n+1)} \cdot \lambda^3. \quad (103)$$

Ein Vergleich mit den exakten Formeln (9) und (21) ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ (Produkt von WALLIS 18b)}, \quad \frac{V_{xnäh}(n)}{V_x(n)} = \frac{3n+3}{3n+1}.$$

7.5. Einbeschriebene Rechtecke (spezielle geschlossene Lösungen)

Dieser Abschnitt liefert einige Lösungen, die in geschlossener Form darstellbar sind.

Nach (100) gilt $y^2 = \lambda^2 \cdot \cos^{2n}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) = \lambda^2 \cdot (\cos^{2n}(\varphi) - \cos^{2n+2}(\varphi))$.

Wir setzen $z = \cos^2(\varphi)$, $y = p \cdot \lambda$, $0 \leq p \leq \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}$, $z^{n+1} - z^n + p^2 = 0$, (104)

und wählen diese Bestimmungsgleichung für z als Ausgangspunkt der Untersuchungen.

Für den Kreis $Ek(1)$ ergibt sich ohne Schwierigkeiten die bekannte Lösung, dass das einbeschriebene Quadrat alle drei Forderungen A1-A3 erfüllt.

Für $n=1$ gilt $z^2 - z + p^2 = 0$, $0 \leq p^2 \leq 1/4$, d.h. $z_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (1 \mp \sqrt{1-4 \cdot p^2})$, $x_{1,2} = \lambda \cdot z_{1,2}$.

(A1) erfordert $z_2 - z_1 = 2 \cdot p$, d.h. $\sqrt{1-4 \cdot p^2} = 2 \cdot p$ mit der Lösung $p^2 = 1/8$ und den Werten $x_{1,2} = \frac{\lambda}{4} (2 \mp \sqrt{2})$, $s = \frac{\lambda \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \cdot y$, $\cot(\varphi_{1,2}) = \frac{x_{1,2}}{y} = \sqrt{2} \mp 1$, $\varphi_{1,2} = \pi/4 \pm \pi/8$.³¹

(A2) führt auf die Bedingung $f(p) = 2 \cdot (z_2 - z_1) \cdot p = 2 \cdot \sqrt{1-4 \cdot p^2} \cdot p \Rightarrow \max$, d.h. die Gleichung $f'(p) = \frac{2 \cdot p - 16 \cdot p^3}{\sqrt{p^2 - 4 \cdot p^4}} = 0$ mit der (gleichen) Lösung $p^2 = 1/8$. $A = s^2 = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2$.

(A3) führt auf die Bedingung $g(p) = 2 \cdot (z_2 - z_1) + 4 \cdot p = 2 \cdot \sqrt{1-4 \cdot p^2} + 4 \cdot p \Rightarrow \max$, d.h. auf die Gleichung $g'(p) = \frac{-8 \cdot p}{\sqrt{1-4 \cdot p^2}} + 4 = 0$ und (erneut) $p^2 = 1/8$. $U = 4 \cdot s = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda$.

³⁰ GRADSTEIN/RYSHIK; Tafeln. Formel 4.272_6.

³¹ Mittels Additionstheorem und $\cot(\pi/4) = \cot(2\pi/8) = 1$ nachzuvollziehen.

Für die Ek(3) folgt aus (104) $z^4 - z^3 + p^2 = 0$, $0 \leq p^2 \leq 27/256$ bzw. $0 \leq p \leq 3\sqrt{3}/16$.

Wir verwenden die Faktorzerlegung

$$\left[z^2 + \frac{a-1}{2}z + \frac{(a^2-1) \cdot (a-1)}{8 \cdot a} \right] \cdot \left[z^2 - \frac{a+1}{2}z + \frac{(a^2-1) \cdot (a+1)}{8 \cdot a} \right] = z^4 - z^3 + p(a)^2 = 0$$

mit $p = p(a) := \frac{a^2-1}{8 \cdot a} \cdot \sqrt{a^2-1}$, $1 \leq a \leq 2$, $0 = p(1) \leq p \leq p(2) = 3\sqrt{3}/16$, $p(a)$ monoton.

Der erste Faktor besitzt keine reellen Lösungen. Aus dem zweiten Faktor folgen die Lösungen

$$\begin{aligned} \cos^2(\varphi_{1,2}) = z_{1,2} &= \frac{a+1}{4 \cdot \sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} \mp \sqrt{2-a}), \\ y = \lambda \cdot \frac{a^2-1}{8 \cdot a} \cdot \sqrt{a^2-1}, \quad x_{1,2} &= \lambda \cdot z_{1,2}^2 = \lambda \cdot \frac{(a+1)^2}{8 \cdot a} \cdot (1 \mp \sqrt{a \cdot (2-a)}). \end{aligned} \quad (105)$$

Zum Beispiel hat für $a = 9/5$ das einbeschriebene Rechteck die Eckpunktkoordinaten

$$y = \lambda \cdot 14\sqrt{14}/225, \quad x_1 = \lambda \cdot 49/225, \quad x_2 = \lambda \cdot 196/225 = 4 \cdot x_1 \quad \text{und Richtungswinkel}$$

$$\varphi_1 = \arccos(\sqrt{7/15}) \approx 46,91^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos(\sqrt{14/15}) \approx 14,96^\circ.$$

Wir ermitteln für die Spezialfälle (A1)–(A3) die entsprechenden Parameter a unter Verwendung von (105).

$$(A1) \quad [2 \cdot y(a)]^2 = [x_2(a) - x_1(a)]^2 \Rightarrow \frac{(a+1)^3}{16 \cdot a^2} \cdot (2 \cdot a^3 - 4 \cdot a^2 + a - 1) = 0.$$

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt[3]{82 + 6 \cdot \sqrt{159}} + \sqrt[3]{82 - 6 \cdot \sqrt{159}} + 4 \right) \approx 1,875550.$$

$$y(a_1) \approx \lambda \cdot 0,266247, \quad x_1(a_1) \approx \lambda \cdot 0,284844, \quad x_2(a_1) \approx \lambda \cdot 0,817338.$$

$$(A2) \quad \frac{d}{da} [y(a) \cdot (x_2(a) - x_1(a))]^2 = 0 \Rightarrow \frac{(a+1)^6 \cdot (a-1)^2}{128 \cdot a^4} \cdot (4 \cdot a^3 - 9 \cdot a^2 + 5 \cdot a - 3) = 0.$$

$$a_2 = \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt[3]{567 + 42 \cdot \sqrt{177}} + \sqrt[3]{567 - 42 \cdot \sqrt{177}} + 9 \right) \approx 1,785124.$$

$$y(a_2) \approx \lambda \cdot 0,226421, \quad x_1(a_2) \approx \lambda \cdot 0,206762, \quad x_2(a_2) \approx \lambda \cdot 0,879566.$$

$$(A3) \quad \frac{d}{da} [2 \cdot y(a) + (x_2(a) - x_1(a))] = 0 \Rightarrow \frac{-\sqrt{a}(a^2-1)(2a-1) + \sqrt{a^2-1}\sqrt{2-a}(2a^2+1)}{2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{2-a}} = 0,$$

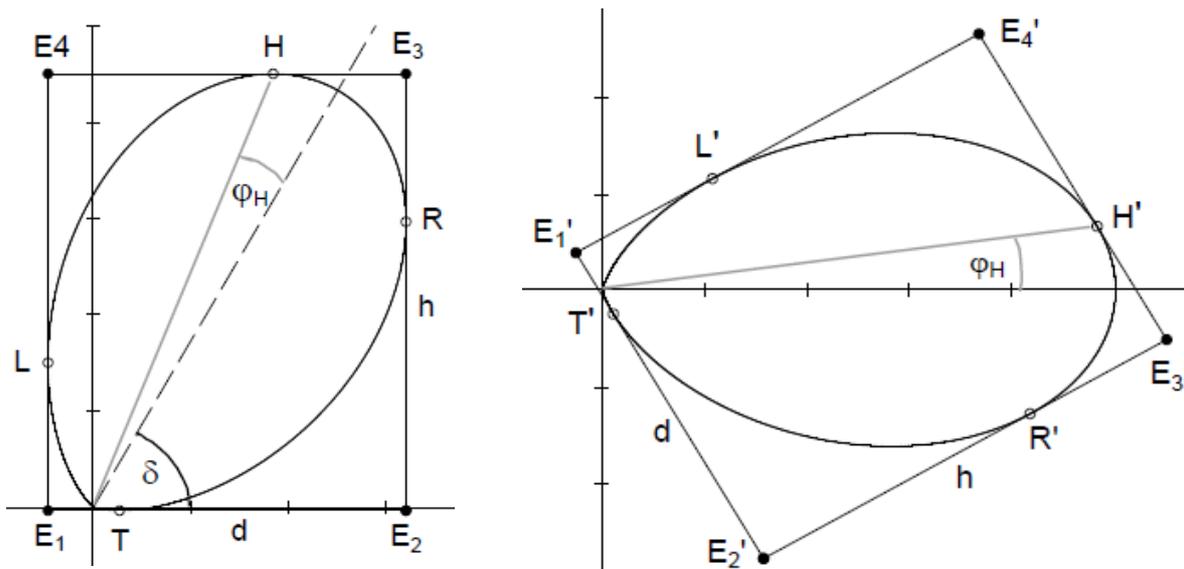
$$\Rightarrow (a^2-1) \cdot (8 \cdot a^5 - 12 \cdot a^4 + a^3 - 4 \cdot a^2 - 2) = 0.$$

$$a_3 \approx 1,64335657 \quad (\text{nur noch numerisch!!}).$$

$$y(a_3) \approx \lambda \cdot 0,168690, \quad x_1(a_3) \approx \lambda \cdot 0,124597, \quad x_2(a_3) \approx \lambda \cdot 0,938369.$$

7.6. Umbeschriebene Rechtecke

Der $Ek(n)$ werden Rechtecke umschrieben. Zu Ermittlung der Berührungspunkte drehen wir die $Ek(n)$ um den Ursprung O und greifen auf die Ausführungen im Abschnitt 6.3. zurück. In dieser Lage ergeben sich die Koordinaten aus den Gleichungen (86-3,4) als Funktionen vom Drehwinkel δ . Mit der Drehmatrix $D(\delta)$ werden die Eikurve und das umschriebene Rechteck in die Ausgangslage zurückgeführt. Für die Berechnungen werden nach Möglichkeit die Symmetrieeigenschaften der $Ek(n)$ genutzt.



In Bezug zu den Lösung von (86-3,4) setzen wir

$$w(\delta, n) := -\frac{n+1}{2n} \cdot \tan \delta + \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n} \cdot \tan \delta\right)^2 + \frac{1}{n}}, \quad 0 \leq \delta < \pi/2, \quad (106a)$$

$$w(\pi/2, n) := \lim_{\delta \rightarrow \pi/2} w(\delta, n) = 0.$$

Es folgen die Winkelformeln

$$\begin{aligned} \tan \varphi_H(\delta, n) &= w(\delta, n), & \tan \varphi_T(\delta, n) &= -w(-\delta, n), \\ \tan \varphi_R(\delta, n) &= -w(\pi/2 - \delta, n), & \tan \varphi_L(\delta, n) &= w(\delta - \pi/2, n), \end{aligned} \quad (106b)$$

und schließlich die Punktkoordinaten aus (86b) mit $\varphi = \varphi(\delta, n)$:

$$\begin{aligned} x(\delta, n) &= \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot \cos(\varphi + \delta) = \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \delta - \sin \varphi \cdot \sin \delta) \\ y(\delta, n) &= \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot \sin(\varphi + \delta) = \lambda \cdot \cos^n \varphi \cdot (\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta). \end{aligned} \quad (106c)$$

In (106c) werden entweder die Winkel aus (106b) eingesetzt oder $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ durch $\tan \varphi$ ersetzt. Es können auch Symmetriebeziehungen verwendet werden:

$$\begin{aligned} x_R(\delta, n) &= y_H(\pi/2 - \delta, n), & x_L(\delta, n) &= y_T(\pi/2 - \delta, n), \\ y_R(\delta, n) &= x_H(\pi/2 - \delta, n), & y_L(\delta, n) &= x_T(\pi/2 - \delta, n), \text{ usw. .} \end{aligned} \quad (106d)$$

Die Koordinaten der Eckpunkte E werden aus den Koordinaten der Berührungspunkte kombiniert.

Wir führen dies (als Beispiel) für die $Ek(3)$ mit $\delta = \pi/3$ durch. Siehe obige Grafiken.

$$\begin{aligned} \tan \varphi_H &= w(\pi/3, 3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{5} - 2) \approx 0,1363, & \varphi_H(\pi/3, 3) &\approx 7,76^\circ, \\ \tan \varphi_T &= -w(-\pi/3, 3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{5} + 2) \approx -2,4457, & \varphi_T(\pi/3, 3) &\approx -67,76^\circ = -(\delta + \varphi_H), \\ \tan \varphi_R &= -w(\pi/6, 3) = \frac{\sqrt{3}}{9}(2 - \sqrt{13}) \approx -0,3090, & \varphi_R(\pi/3, 3) &\approx -17,17^\circ, \\ \tan \varphi_L &= w(-\pi/6, 3) = \frac{\sqrt{3}}{9}(2 + \sqrt{13}) \approx 1,0788, & \varphi_L(\pi/3, 3) &\approx 47,17^\circ = \pi/2 - (\delta + \varphi_R). \end{aligned}$$

$$x_H = \lambda \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_H)^2} \cdot (\cos \delta - \tan \varphi_H \cdot \sin \delta) \approx 0,3682 \cdot \lambda; \text{ analoge Rechnungen ergeben}$$

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,3682 \\ 0,9004 \end{pmatrix} \lambda, \quad \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,0537 \\ -0,0073 \end{pmatrix} \lambda, \quad \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6393 \\ 0,5929 \end{pmatrix} \lambda, \quad \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,0928 \\ 0,3002 \end{pmatrix} \lambda.$$

$$\begin{pmatrix} x_{E1} \\ y_{E1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L \\ y_T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{E3} \\ y_{E3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_H \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{E4} \\ y_{E4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L \\ y_H \end{pmatrix}.$$

Die Punktkoordinaten der Ausgangslage folgen mittels Drehmatrix $D(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x'_E \\ y'_E \end{pmatrix} = D(\pi/3) \cdot \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_{E1}, \dots, x'_{E4} \\ y'_{E1}, \dots, y'_{E4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,0527 & 0,3135 & 1,0996 & 0,7334 \\ 0,0767 & -0,5576 & -0,1037 & 0,5305 \end{pmatrix} \lambda.$$

Schließlich ermitteln wir noch die Seitenlängen, Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks.

$$h(\delta, n) = y_H(\delta, n) - y_T(\delta, n) = 0,9077 \cdot \lambda, \quad d(\delta, n) = x_R(\delta, n) - x_L(\delta, n) = 0,7324 \cdot \lambda.$$

$$U(\delta, n) = 2 \cdot (h(\delta, n) + d(\delta, n)) = 3,2802 \cdot \lambda, \quad A(\delta, n) = h(\delta, n) \cdot d(\delta, n) = 0,6648 \cdot \lambda^2.$$

Wir suchen (analog zu den einbeschriebenen Rechtecken) die Lage und Abmessungen spezieller umschriebener Rechtecke:

A1) Umschriebene Quadrate $s = h = d$.

A2) Umschriebene Rechtecke mit extremalen Flächeninhalten $A = h \cdot d \Rightarrow \max/\min$.

A3) Umschriebene Rechtecke mit extremalen Umfängen $U = 2 \cdot (h + d) \Rightarrow \max/\min$.

Die Lösungen sind Funktionen von δ und n .

Da die Beziehungen $d(\delta, n) = h(\pi/2 - \delta, n)$, $U(\delta, n) = U(\pi/2 - \delta, n)$, $A(\delta, n) = A(\pi/2 - \delta, n)$ gelten, genügt es aufgrund der Symmetrie den Winkelbereich $0 \leq \delta \leq \pi/4$ zu betrachten.

Wir bilden mittels (106) für reelles $x \geq 1$ die Funktionen

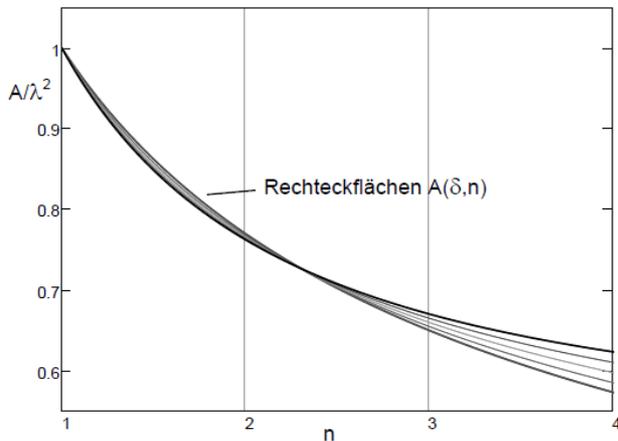
$$U(\delta, x) = 2 \cdot [h(\delta, x) + h(\pi/2 - \delta, x)], \quad A(\delta, x) = h(\delta, x) \cdot h(\pi/2 - \delta, x) \quad (107a)$$

und stellen diese mit ausgewählten Parameterwerten $0 \leq \delta \leq \pi/4$ grafisch dar.

Offensichtlich liefern für alle $x = n$ die Drehwinkel $\delta = \pi/4$ und $\delta = 0$ Extremalwerte für Umfang und Flächeninhalt der Rechtecke. Die Entscheidung über Maximum bzw. Minimum hängt jedoch von n ab!

Das Rechteck für $\delta = \pi/4$ ist ein umschriebenes Quadrat, denn $d(\delta, n) = h(\pi/2 - \delta, n)$.

Das Rechteck für $\delta = 0$ ist achsenparallel. Wir bezeichnen es als Basisrechteck.



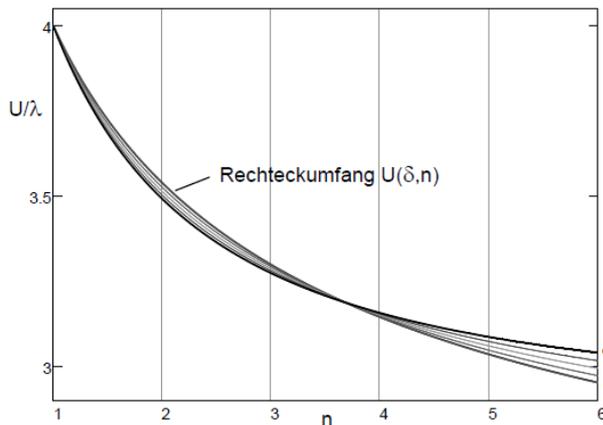
$$0 < \delta < \pi/4.$$

$$A(0, 1) = A(\delta, 1) = A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \quad \text{Kreis.}$$

$$A(0, 2) > A(\delta, 2) > A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right).$$

$$A(0, n) < A(\delta, n) < A\left(\frac{\pi}{4}, n\right), \quad n > 2.$$

$$A(\delta, n) - \lambda^2 \cdot \cos \delta \cdot \sin \delta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$



$$0 < \delta < \pi/4.$$

$$U(0, 1) = U(\delta, 1) = U\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \quad \text{Kreis.}$$

$$U(0, n) > U(\delta, 2) > U\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \quad n = 2, 3.$$

$$U(0, n) < U(\delta, n) < U\left(\frac{\pi}{4}, n\right), \quad n > 3.$$

$$U(\delta, n) - 2 \cdot \lambda \cdot (\cos \delta + \sin \delta) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Hier möge die Grafik einen exakten Beweis ersetzen.

Für $n \rightarrow \infty$ gelten wegen $w(\pm \delta, n) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (\pm \tan \delta + \sqrt{\tan^2 \delta}) = \begin{cases} 0 \\ \tan \delta \end{cases}$ die Grenzwerte

$$y_H(\delta, n) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + w^2(\delta, n)^{n+1}}} \cdot (\sin \delta + w(\delta, n) \cdot \cos \delta) \rightarrow \lambda \cdot \sin \delta, \quad (107b)$$

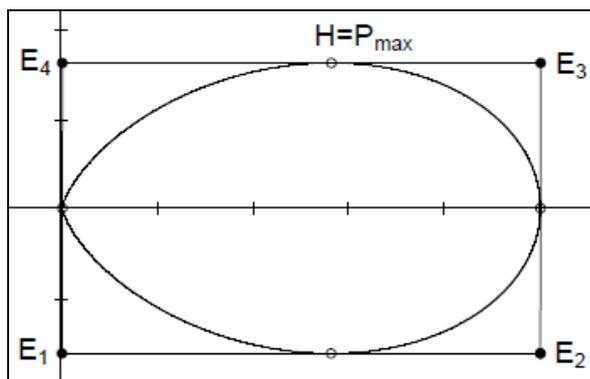
$$y_T(\delta, n) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + w^2(-\delta, n)^{n+1}}} \cdot (\sin \delta - w(-\delta, n) \cdot \cos \delta) \rightarrow \lambda \cdot 0. \quad (107c)$$

$$h(\delta, n) = y_H(\delta, n) - y_T(\delta, n) \rightarrow \lambda \cdot \sin \delta, \quad h(\pi/2 - \delta, n) \rightarrow \lambda \cdot \sin(\pi/2 - \delta) = \lambda \cdot \cos \delta, \\ \text{und mit (107a)} \quad U(\delta, n) \rightarrow 2\lambda \cdot (\sin \delta + \cos \delta), \quad A(\delta, n) \rightarrow \lambda^2 \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta. \quad (107d)$$

Diese Grenzwertbetrachtungen bestätigen die Anschauung, dass sich die um δ gedrehte $Ek(n)$ mit wachsendem n ihrem Durchmesser annähert.

Abschließend folgen die Formeln für die Eckkoordinaten, den Umfang und den Flächeninhalt der umschriebenen Quadrate und Basisrechtecke.

Für das Basisrechteck kann unmittelbar auf 3.2. (11) zurückgegriffen werden.



$$y_{\max} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}^{n+1}, \quad x_{\max} = \sqrt{n} \cdot y_{\max},$$

$$x_{E_{1,4}}(0, n) = 0, \quad x_{E_{2,3}}(0, n) = \lambda,$$

$$y_{E_{1,2}}(0, n) = -y_{\max}, \quad y_{E_{3,4}}(0, n) = y_{\max}.$$

$$d(0, n) = \lambda, \quad h(0, n) = 2 \cdot y_{\max},$$

$$U(0, n) = 2 \cdot \lambda + 4 \cdot y_{\max}, \quad A(0, n) = 2 \cdot \lambda \cdot y_{\max}.$$

Für das Quadrat vereinfachen sich die Formeln (106) einschließlich der Drehmatrix $D(\pi/4)$. Mit den Abkürzungen

$$T_{1,2} = T_{1,2}(n) = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2 \cdot n}\right)^2 + \frac{1}{n}} \mp \frac{n+1}{2 \cdot n}, \quad C_{1,2} = C_{1,2}(n) = \frac{1}{\sqrt{1 + (T_{1,2})^2}}^{n+1} \quad (108)$$

ergeben sich die Koordinaten

$$x_{B_1, B_4} = \lambda \cdot C_2, \quad y_{B_1, B_4} = \mp \lambda \cdot C_2 \cdot T_2.$$

$$x_{B_2, B_3} = \lambda \cdot C_1, \quad y_{B_2, B_3} = \mp \lambda \cdot C_1 \cdot T_1.$$

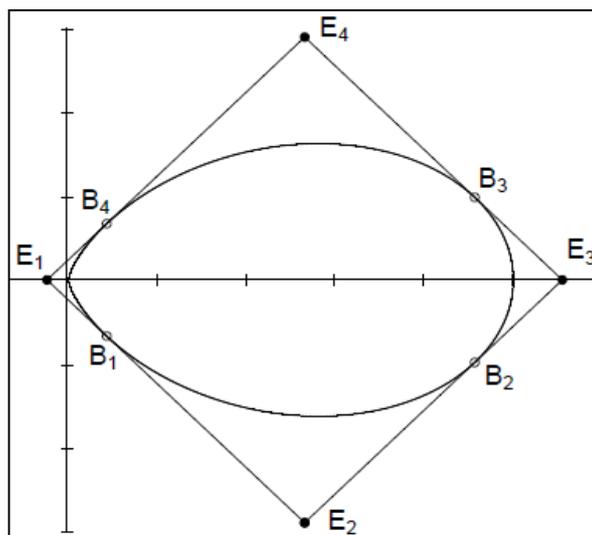
$$x_{E_1} = \lambda \cdot C_2 \cdot (1 - T_2), \quad y_{E_1} = 0.$$

$$x_{E_3} = \lambda \cdot C_1 \cdot (1 - T_1), \quad y_{E_3} = 0.$$

$$x_{E_2, E_4} = \frac{x_{E_1} + x_{E_3}}{2}, \quad y_{E_2, E_4} = \mp \frac{x_{E_3} - x_{E_1}}{2}.$$

Seitenlänge $s = \sqrt{2} \cdot y_{E_4} = \frac{x_{E_3} - x_{E_1}}{\sqrt{2}}.$

Umfang $U = 4 \cdot s$, Flächeninhalt $A = s^2.$



Die Tabelle enthält einige Werte für $n = 2, 3, 4.$ (Zur Ek(3) vgl. auch 6.4. !).

n	Basisrechteck	Quadrat
2	$x_{\max} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \lambda, \quad y_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \lambda$ $A_{\max} \approx 0,770 \cdot \lambda^2, \quad U_{\max} \approx 3,540 \cdot \lambda$	$x_{E_{1, E_3}} = \mp \sqrt{\frac{71 \mp 17\sqrt{17}}{108}} \lambda, \quad s = \sqrt{\frac{71 + 8\sqrt{2}}{108}} \lambda$ $A_{\min} \approx 0,762 \cdot \lambda^2, \quad U_{\min} \approx 3,492 \cdot \lambda$
3	$x_{\max} = \frac{9}{16} \lambda, \quad y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \lambda$ $A_{\min} \approx 0,650 \cdot \lambda^2, \quad U_{\max} \approx 3,299 \cdot \lambda$	$x_{E_{1, E_3}} = \frac{17 \mp 7\sqrt{7}}{32} \lambda, \quad s = \frac{7\sqrt{14}}{32} \lambda$ $A_{\max} \approx 0,670 \cdot \lambda^2, \quad U_{\min} \approx 3,274 \cdot \lambda$
4	$x_{\max} = \frac{32\sqrt{5}}{125} \lambda, \quad y_{\max} = \frac{16\sqrt{5}}{125} \lambda$ $A_{\min} \approx 0,572 \cdot \lambda^2, \quad U_{\min} \approx 3,145 \cdot \lambda$	$x_{E_{1, E_3}} = \mp \frac{1}{100} \sqrt{\frac{29701 \mp 4633\sqrt{41}}{5}} \lambda, \quad s \approx 0,7893 \cdot \lambda$ $A_{\max} \approx 0,630 \cdot \lambda^2, \quad U_{\max} \approx 3,157 \cdot \lambda$

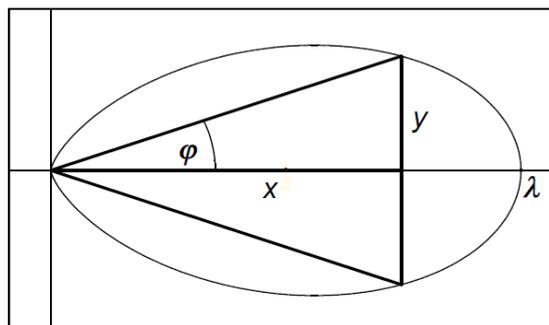
7.7. Einbeschriebene Kegel

Dem durch Rotation der $Ek(n)$ um die x -Achse entstehenden Eikörper (vgl. 3.3) werden Kegel mit der Spitze im linken bzw. im rechten Endpunkt der Rotationsachse einbeschrieben, kurz „Linkskegel“ oder „Rechtskegel“ genannt. Gesucht wird jeweils der Kegel mit maximalem Volumen V_{LK} bzw. V_{RK} .

Das Volumen des *Linkskegels* in Abhängigkeit vom Richtungswinkel φ beträgt nach (2)

$$V_{LK}(\varphi) = \frac{\pi}{3} \cdot y^2 \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot \lambda^3 \cdot \cos^{3n+1}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)$$

Für den Kegel mit maximalem Volumen ist notwendigerweise $\frac{d}{d\varphi} V_{LK}(\varphi) = 0$.



Das führt auf die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\pi}{3} \cdot \lambda^3 \cdot \cos^{3n}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot [2 \cdot \cos^2(\varphi) - (3n+1) \cdot \sin^2(\varphi)] = 0$$

mit den Minimallösungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $V(\varphi_{1,2}) = 0$ und mit der Maximallösung φ_{LK}^* :

$$\tan(\varphi_{LK}^*) = \sqrt{\frac{2}{3n+1}} \quad \text{bzw.} \quad \cos(\varphi_{LK}^*) = \sqrt{\frac{3n+1}{3n+3}}, \quad \sin(\varphi_{LK}^*) = \sqrt{\frac{2}{3n+3}} \quad (109a)$$

Die Kegelmaße betragen für die Höhe x_{LK}^* , den Radius y_{LK}^* und das Volumen V_{LK}^* der $Ek(n)$

$$x_{LK}^* = \lambda \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad y_{LK}^* = \lambda \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2}{3n+3}}, \quad V_{LK}^*(n) = \frac{2\pi \cdot \lambda^3}{9(n+1)} \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{\frac{3n+1}{2}} \quad (109b)$$

Wir erhalten die speziellen Werte

$$Ek(1): \quad x_{LK}^* = \frac{2}{3} \lambda, \quad y_{LK}^* = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda, \quad V_{LK}^* = \frac{4 \cdot \pi}{81} \lambda^3, \quad \varphi_{LK}^* = \arctan(1/\sqrt{2}) \approx 35,26^\circ.$$

$$Ek(3): \quad x_{LK}^* = \frac{25}{36} \lambda, \quad y_{LK}^* = \frac{5\sqrt{5}}{36} \lambda, \quad V_{LK}^* = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{\pi}{18} \lambda^3, \quad \varphi_{LK}^* = \arctan(1/\sqrt{5}) \approx 24,09^\circ.$$

Das Verhältnis des Kegelvolumens zum Volumen V_x des Rotationskörpers beträgt nach (21)

$$V_{LK}^*(n)/V_x(n) = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{\frac{3n+3}{2}} \quad \text{und konvergiert für } n \rightarrow \infty: \quad \underline{V_{LK}^*(n)/V_x(n) \rightarrow 1/e}.$$

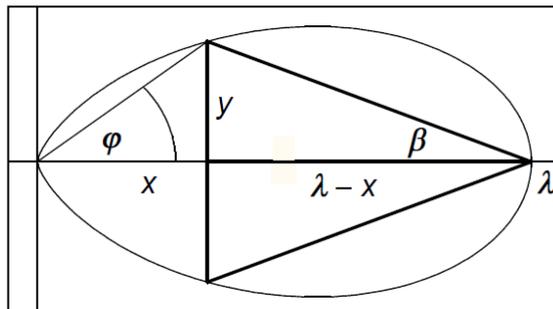
Die Kegelhöhe konvergiert entsprechend: $\underline{x_{LK}^* \rightarrow \lambda/\sqrt[3]{e} = x_{LK}^*(\infty) \approx 0,7165 \cdot \lambda}$.

Setze z.B. $2m = 3n + 3$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{\frac{3n+3}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n+3}\right)^{\frac{3n+3}{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = e^{-1}.$

Das Volumen des *Rechtskegels* beträgt

$$V_{RK}(\varphi) = \frac{\pi}{3} \cdot y^2 \cdot (\lambda - x) = \frac{\pi}{3} \cdot \lambda^3 \cdot \cos^{2n}(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) \cdot (1 - \cos^{n+1} \varphi).$$

Für das Maximalvolumen gilt $\frac{d}{d\varphi} V_{RK}(\varphi) = 0$.



Das führt auf die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\pi}{3} \cdot \lambda^3 \cdot \cos^{2n+1}(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \cdot [-2n + 2(n+1) \cdot \cos^2(\varphi) + (3n+1) \cdot \cos^{n+1}(\varphi) - 3(n+1) \cdot \cos^{n+3}(\varphi)] = 0$$

mit den Minimallösungen $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, V(\varphi_1, 2) = 0$ und auf die algebraische Gleichung

$$3 \cdot (n+1) \cdot z^{n+3} - (3 \cdot n + 1) \cdot z^{n+1} - 2 \cdot (n+1) \cdot z^2 + 2 \cdot n = 0 \quad \text{für } z := \cos(\varphi_{RK}^*). \quad (110)$$

Mit einer geeigneten Lösung erhalten wir für den Rechtskegel mit maximalem Volumen

$$x_{RK}^* = \lambda \cdot z^{n+1}, \quad (y_{RK}^*)^2 = \lambda^2 \cdot z^{2n} \cdot (1 - z^2), \quad V_{RK}^*(n) = \frac{\pi}{3} (y_{RK}^*)^2 \cdot (\lambda - x_{RK}^*).$$

Wir begnügen uns mit den speziellen Werten für die *Ek(3)*:

Aus (110) folgt $2 \cdot (z^2 - 1) \cdot (6 \cdot z^4 + z^2 - 3) = 0$ mit $z^2 = \frac{\sqrt{73} - 1}{12}$.

$$x_{RK}^*(3) = \frac{37 - \sqrt{73}}{2 \cdot 6^2} \cdot \lambda, \quad (y_{RK}^*(3))^2 = \frac{151 \cdot \sqrt{73} - 1051}{2 \cdot 6^4} \cdot \lambda^2, \quad V_{RK}^*(3) = \frac{2117 \cdot \sqrt{73} - 12881}{6^7} \cdot \pi \cdot \lambda^3.$$

$$x_{RK}^*(3) \approx 0,3953 \cdot \lambda, \quad (y_{RK}^*(3))^2 \approx 0,3037 \cdot \lambda^2, \quad V_{RK}^*(3) \approx 0,0584 \cdot \lambda^3.$$

$$\beta_{RK}^*(3) = \arctan(y_{RK}^* / (\lambda - x_{RK}^*)) \approx 26,67^\circ.$$

Analog zum *Linkskegel* ermitteln wir die Werte von $x_{RK}^*(n)$ und $V_{RK}^*(n)/V_x(n)$ für $n \rightarrow \infty$.

In (110) wird $z := a^{\frac{1}{n+1}}$ mit $a := x_{RK}^*(n)/\lambda$ eingesetzt und der Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ermittelt:

$$3a \cdot \left[(n+1) \cdot a^{\frac{2}{n+1}} - (n+1) \right] + 2a - 2 \cdot \left[(n+1) \cdot a^{\frac{2}{n+1}} - (n+1) \right] - 2 \rightarrow 6a \cdot \ln(a) + 2a - 4 \cdot \ln(a) - 2$$

Verwende $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^m)^x - 1}{x} = \ln(a^m)$ mit $x = \frac{1}{n+1}$.

Aus $(6a - 4) \cdot \ln(a) + 2 \cdot (a - 1) = 0$ folgt angenähert $a_\infty \approx 0,43942$, d.h. $x_{RK}^*(\infty) \approx 0,4394 \cdot \lambda$.

Das Verhältnis des Kegelvolumens zum Volumen des Rotationskörpers für fest gewähltes x

beträgt nach (3), (21) $q(x, n) := V : V_x = \frac{\pi}{3} \left(\lambda^{\frac{2}{n+1}} \cdot x^{\frac{-2}{n+1}} - 1 \right) \cdot x^2 \cdot (\lambda - x) : \frac{2 \cdot \pi}{9n+3} \cdot \lambda^3$

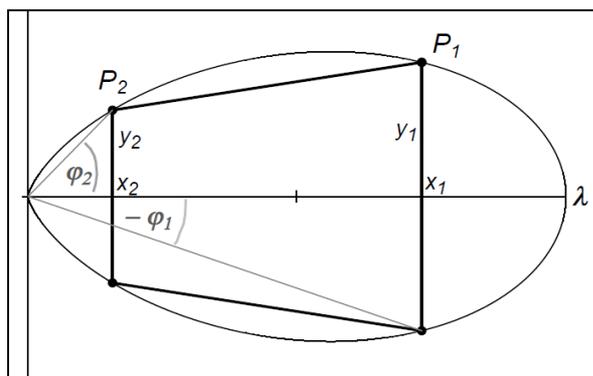
und speziell $q(x_{RK}^*(\infty), n) = q(a_\infty, n) = \frac{1}{2} \cdot a_\infty^2 \cdot (1 - a_\infty) \cdot (3n + 3 - 2) \cdot \left[(a_\infty)^{\frac{-2}{n+1}} - 1 \right]$.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $q(a_\infty, n) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_\infty^2 \cdot (1 - a_\infty) \cdot [3 \cdot \ln(a_\infty^{-2}) - 2 \cdot 0]$ und damit folgt für das

Volumenverhältnis $V_{RK}^*(n)/V_x(n) \rightarrow 3 \cdot a_\infty^2 \cdot (a_\infty - 1) \cdot \ln(a_\infty) \approx 0,2670$.

7.8. Einbeschriebene Kegelstümpfe

In Ergänzung zu 7.7. ermitteln wir das Volumen V_{KS} von Kegelstümpfen, die dem von der $Ek(n)$ erzeugten Rotationskörper einbeschrieben sind.



$$V_{KS}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\pi}{3} \cdot (x_1 - x_2) \cdot (y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)$$

mit $x_{1,2} = \lambda \cdot \cos^{n+1}(\varphi_{1,2})$,

$$y_{1,2} = \lambda \cdot \cos^n(\varphi_{1,2}) \cdot \sin(\varphi_{1,2})$$

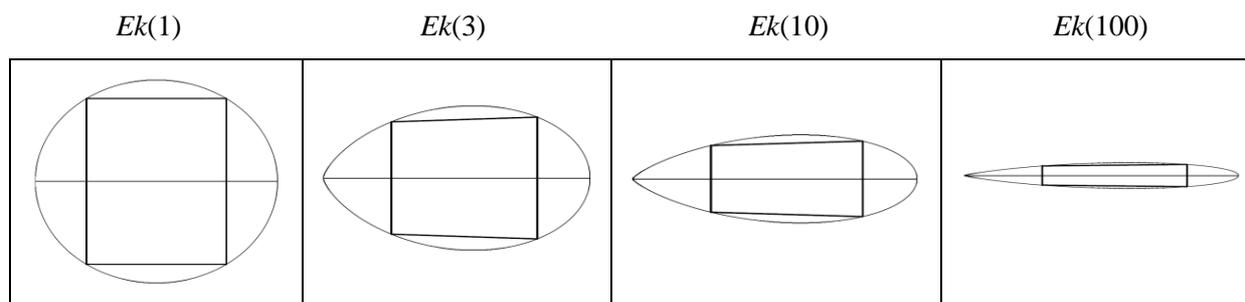
und $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \pi/2$.

Speziell

$$V_{LK}(\varphi_1) = V_{KS}\left(\varphi_1, \frac{\pi}{2}\right), V_{RK}(\varphi_2) = V_{KS}(0, \varphi_2).$$

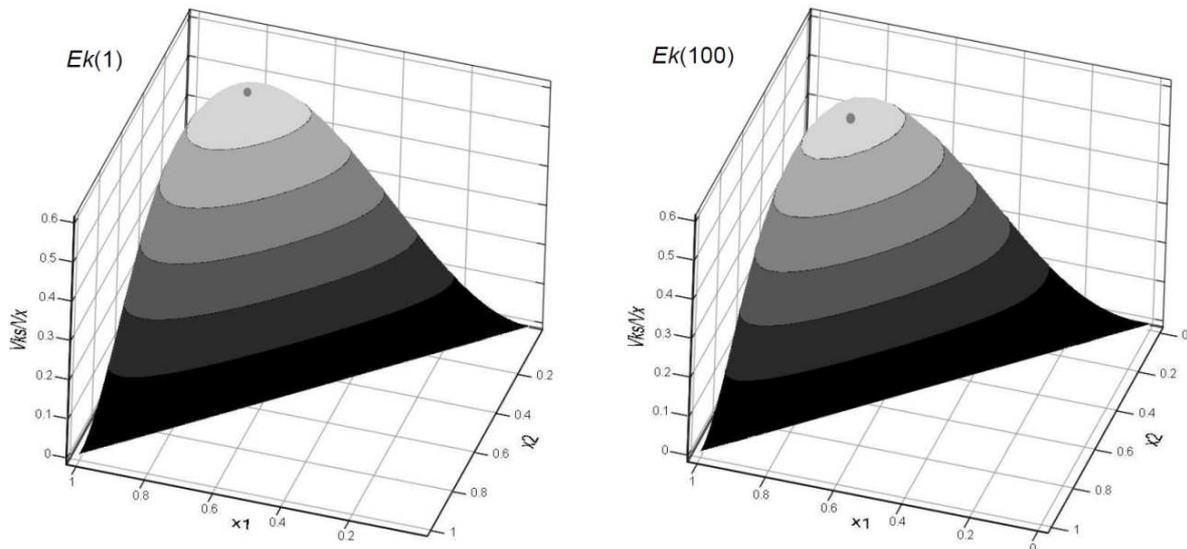
Zur Ermittlung der Kegelstümpfe mit maximalem Volumen $V_{KS}^*(n)$ greifen wir auf das schon im Abschnitt 7.3. benutzte numerische Maximierungsprogramm zurück und erhalten u. a. folgende Ergebnisse.

n	$\varphi_1^*/^\circ$	$\varphi_2^*/^\circ$	x_1^*/λ	x_2^*/λ	y_1^*/λ	y_2^*/λ	V_{KS}^*/λ^3	V_{KS}^*/V_x
1	27,37	62,63	0,7887	0,2113	0,4083	0,4083	0,3023	0,5774
2	21,95	51,40	0,7980	0,2428	0,3215	0,3042	0,1708	0,5707
3	18,86	44,68	0,8020	0,2557	0,2739	0,2528	0,1191	0,5687
4	16,79	40,06	0,8043	0,2626	0,2427	0,2208	0,0915	0,5677
10	11,217	27,183	0,8088	0,2760	0,1604	0,1417	0,0383	0,5662
100	3,6790	9,0195	0,8119	0,2846	0,0522	0,0452	0,0039	0,5648



Die x^* -Koordinaten und das Volumenverhältnis V_{KS}^*/V_x konvergieren offenbar für $n \rightarrow \infty$.

Zur Veranschaulichung wird das Volumenverhältnis V_{KS}/V_x über der x_1 - x_2 -Ebene für $x_1 > x_2$ und $n = 1$ bzw. $n = 100$ dargestellt. Die geringe Lageänderung des Maximalpunkts (x_1^*, x_2^*) und des Verhältniswertes ist offensichtlich.



Die Grenzwerte von $x^*(n)$ und $V_{KS}^*(n)/V_x(n)$ für $n \rightarrow \infty$ können analog dem Vorgehen im Abschnitt 7.7. gewonnen werden. Auf die ausführliche Darstellung der Zwischenschritte wird verzichtet.

Es empfiehlt sich, das Volumen V_{KS} mit Hilfe der Formel (3) $y = \sqrt{\lambda^{\frac{2}{n+1}} \cdot x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2}$ direkt als Funktion der Koordinaten x_1, x_2 darzustellen und die Vereinfachungen $a := x_1/\lambda$ und $b := x_2/\lambda$ zu verwenden: $V_{KS}(x_1, x_2, n) = \frac{\pi}{3} \cdot \lambda^3 \cdot f(a, b, n)$.

Für die (mit $(n+1)$ multiplizierten) partiellen Ableitungen $f_a(a, b, n)$ und $f_b(a, b, n)$ werden (nach einer Reihe geeigneter Umformungen²⁸) die Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ gewonnen:

$$g_a(a, b) = -(6 \ln a + 2) \cdot a^2 + (4 \ln a + 2 - \sqrt{\ln b / \ln a} + 4 \sqrt{\ln a \cdot \ln b}) \cdot a \cdot b - (2 \ln b + 2 \sqrt{\ln a \cdot \ln b} - \sqrt{\ln b / \ln a}) \cdot b^2,$$

$$g_b(a, b) = -g_a(b, a).$$

Die notwendigen Bedingungen für das maximale Volumen $f_a(a, b, n) = 0$ und $f_b(a, b, n) = 0$ gehen im Grenzprozess über in die Bedingungen $\underline{g_a(a, b) = 0}$ und $\underline{g_b(a, b) = 0}$.

Ein numerisches Lösungsverfahren ergibt für dieses Gleichungssystem die Näherungswerte

$$a_\infty \approx 0,81229.. \text{ und } b_\infty \approx 0,28561.., \text{ d.h. } \underline{x_1^*(\infty) \approx 0,8123 \cdot \lambda}, \quad \underline{x_2^*(\infty) \approx 0,2856 \cdot \lambda}.$$

Damit folgt der Grenzwert des Volumenverhältnisses (durch Zerlegung in Teilgrenzwerte)

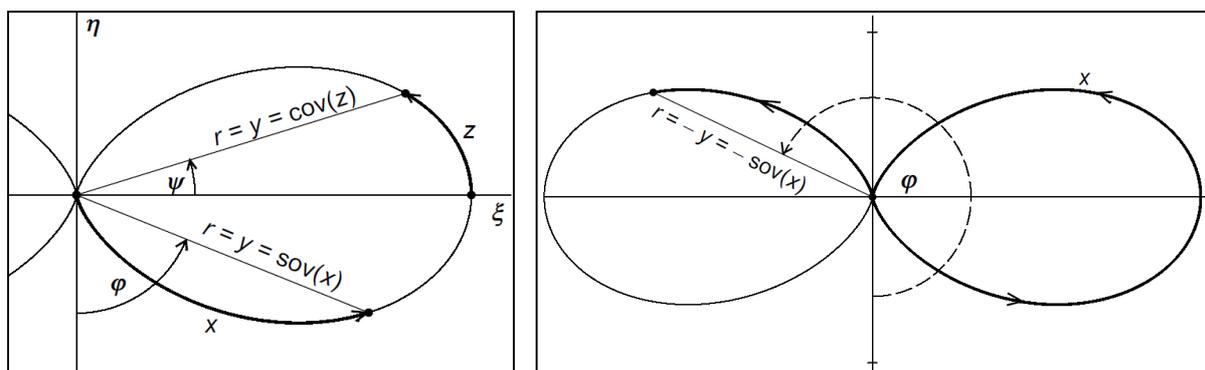
$$\underline{V_{KS}(x_1^*(\infty), x_2^*(\infty), n)/V_x(n) \rightarrow 0.5653... \cong \lim_{n \rightarrow \infty} V_{KS}^*(n)/V_x(n)}.$$

²⁸ Der Einsatz eines Computeralgebrasystems ist hier sehr hilfreich.

8. Der Zusammenhang von Sehne und Bogenlänge auf der $EK(n)$

8.1. Grundlegende Vereinbarungen und Definition der Eikurvenfunktionen

Anknüpfend an die Abschnitte 3.1. und 4.1. befassen wir uns in den folgenden Abschnitten ausführlicher mit dem Zusammenhang von Bogenlänge, Richtungswinkel und Sehnenlänge auf der verallgemeinerten Eikurve $EK(n)$ und treffen vorab Festlegungen der Bezeichnungen und definieren neue Funktionen.



O. B. d. A. wird der Maßstabsfaktor $\lambda = 1$ gesetzt.

Die Eikurve $EK(n)$ liegt im kartesischen (ξ, η) -Koordinatensystem: $(\xi^2 + \eta^2)^{n+1} = \xi^{2n}$. (= 4)
 Der Richtungswinkel φ des Ortsvektors wird im positiven Drehsinn von der negativen η -Achse aus gemessen. Die Länge des vom Ortsvektor beschriebenen Bogens wird mit x bezeichnet. Die Bogenlänge vergrößert sich mit jedem Umlauf des Ortsvektors um den Wert des Kurvenumfangs. Bei negativem Drehsinn ($\varphi < 0$) wird auch die Bogenlänge negativ angegeben ($x < 0$).

Dem zum Bogen der Länge x gehörenden Ortsvektor wird ein Funktionswert $y = \text{sov}(x, n)$ zugeordnet, der folgende Eigenschaften hat: Liegt der Ortsvektor (der Länge r) in den Quadranten I bzw. IV, so ist $y = r$, liegt er in den Quadranten II bzw. III, so ist $y = -r$.

Analog wird dem Bogen der Länge z der Funktionswert $y = \text{cov}(z, n)$ zugeordnet.

Mit Bezug auf die Herleitung der Formel (7) gilt

$$\begin{aligned}
 EK(n): \quad r^2 &= \sin^{2n}(\varphi), & r^2 &= \cos^{2n}(\psi), \\
 y(\varphi) &= |\sin^{n-1}(\varphi)| \cdot \sin(\varphi), & y(\psi) &= |\cos^{n-1}(\psi)| \cdot \cos(\psi), \quad -\infty < \varphi, \psi < \infty. \\
 x(\varphi) &= n \cdot \int_0^\varphi \sin^{n-1}(\phi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)} d\phi, & 0 \leq \varphi \leq \pi, & k^2 = 1 - 1/n^2, \\
 z(\psi) &= n \cdot \int_0^\psi \cos^{n-1}(\phi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \cos^2(\phi)} d\phi, & -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2. &
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

(111) ist mit den angegebenen Winkeln eine Parameterdarstellung der Eikurvenfunktionen.

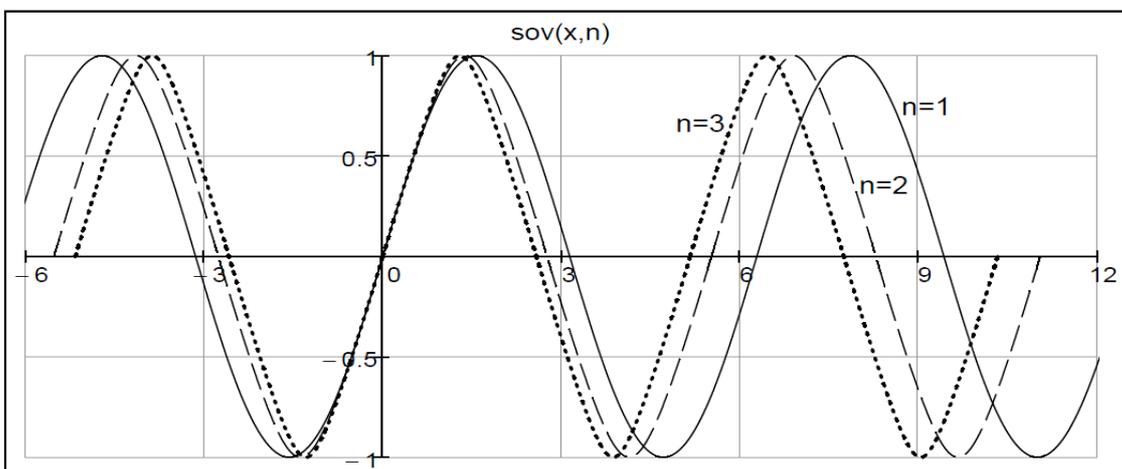
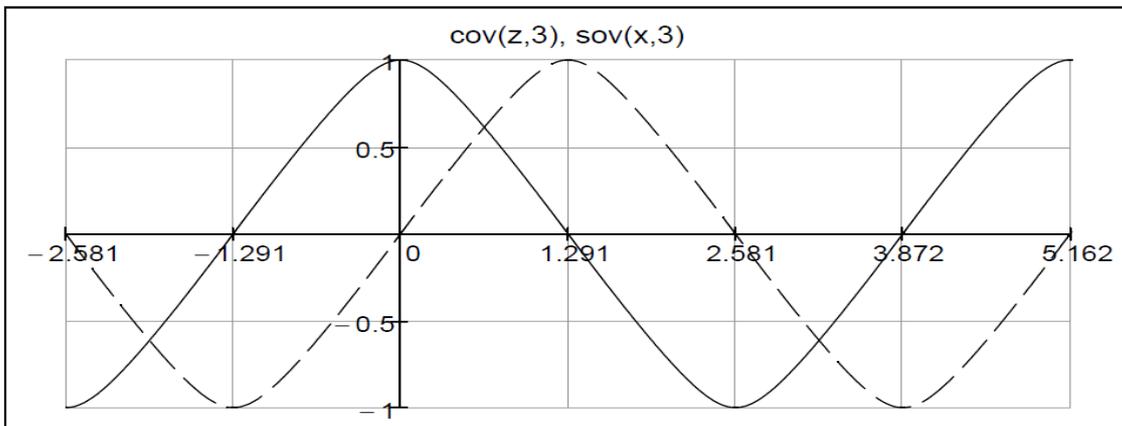
$$\begin{aligned}
 \underline{y = \text{sov}(x, n)}: \quad x &= x(\varphi, n), \quad y = y(\varphi, n), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \text{Sinus ovalicus}, \\
 \underline{y = \text{cov}(z, n)}: \quad z &= z(\psi, n), \quad y = y(\psi, n), \quad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2, \quad \text{Kosinus ovalicus}.
 \end{aligned}
 \tag{111a}$$

Zur Fortsetzung der Funktionen auf beliebige Bogenlängen $-\infty < x < \infty$ wird die Bogenlänge $\omega = \omega(n) = U(n, \lambda = 1)$ des Umfangs der $Ek(n)$ benötigt. Die Werte können dem Abschnitt **3.1.** entnommen werden.

Entsprechend obiger *Festlegungen* gelten folgende Beziehungen.

„Halbperiode“	$\omega = \omega(n) = x(\pi)$	=> (111)																	
Berechnung nach (111)	$y = \text{sov}(x)$ für $0 \leq x \leq \omega$ $y = \text{cov}(z)$ für $0 \leq z \leq \omega/2$	=> (111a)																	
Reduktionsformel	<u>$\text{cov}(z) = \text{sov}(z + \omega/2)$</u>	(112)																	
Vorzeichenregeln	$\text{sov}(-x) = -\text{sov}(x)$, $\text{cov}(-z) = \text{cov}(z)$	(113)																	
Quadrantenbeziehungen	$\text{sov}(x + \omega) = -\text{sov}(x)$, $\text{cov}(z + \omega) = -\text{cov}(z)$																		
Periodizität	$\text{sov}(x + 2\omega) = \text{sov}(x)$, $\text{cov}(z + 2\omega) = \text{cov}(z)$																		
Werte	$ \text{sov}(x) \leq 1$, $ \text{cov}(x) \leq 1$, $-\infty < x < \infty$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">$\omega/2$</td> <td style="padding: 2px 10px;">ω</td> <td style="padding: 2px 10px;">$3\omega/2$</td> <td style="padding: 2px 10px;">2ω</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\text{sov}(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-1</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\text{cov}(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">-1</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> <td style="padding: 2px 10px;">1</td> </tr> </table>	x	0	$\omega/2$	ω	$3\omega/2$	2ω	$\text{sov}(x)$	0	1	0	-1	0	$\text{cov}(x)$	1	0	-1	0	1
x	0	$\omega/2$	ω	$3\omega/2$	2ω														
$\text{sov}(x)$	0	1	0	-1	0														
$\text{cov}(x)$	1	0	-1	0	1														

Der Verlauf der Eikurvenfunktionen wird in den folgenden Grafiken deutlich.



Beschränken wir die Winkelbereich der Parametergleichungen (111a) geeignet, so existieren (eindeutige) Umkehrfunktionen der Eikurvenfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\text{arcsov}}(y,n) &:= x(\varphi,n) , y = y(\varphi) , -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 , \text{ Arcussinus ovalicus,} \\ \underline{\text{arccov}}(y,n) &:= z(\psi,n) , y = y(\psi) , 0 \leq \psi \leq \pi , \text{ Arcuscosinus ovalicus.} \end{aligned} \right| \quad (114a)$$

$$\left. \begin{aligned} -\omega/2 \leq \text{arcsov}(y) \leq \omega/2 , 0 \leq \text{arccov}(y) \leq \omega , \text{arcsov}(y) + \text{arccov}(y) = \omega/2 , \\ \text{arcsov}(-y) = -\text{arcsov}(y) , \text{arccov}(-y) = \omega - \text{arccov}(y) . \end{aligned} \right| \quad (114b)$$

Zu jedem y gibt es eine unendliche Schar von Bogenlängen x :

$$x(y,n) = \text{arcsov}(y) \pm m \cdot \omega(n) , m = 0,1,2,\dots , -1 \leq y \leq 1 . \quad (115)$$

Die Eikurvenfunktionen sind eine Verallgemeinerung der Kreisfunktionen, denn es gilt

$$\underline{\text{sov}}(x,1) = \sin(x) , \underline{\text{cov}}(z,1) = \cos(z) , \omega(1) = \pi , -\infty < x, z < \infty . \quad (116)$$

Formel (111) vereinfacht sich nämlich für $n=1$ zu

$$y(\varphi) = \sin(\varphi) , x = \int_0^\varphi 1 \cdot d\phi = \varphi \text{ und } y(\psi) = \cos(\psi) , z = \int_0^\psi 1 \cdot d\phi = \psi .$$

Aufgrund der Reduktionsformel (112) können wir im Wesentlichen die Parameterdarstellung (111a) des Sinus ovalicus zur Grundlage weiterer Untersuchungen wählen.

Hilfreich ist weiterhin die Tatsache, dass für ungerades n diese Parameterdarstellung für den gesamten Periodenbereich $0 \leq x \leq 2\omega$ bzw. $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gilt.

8.2. Formeln für die Bogenintegrale der EK(n); Rekursion und Beispiele

Mit Hilfe geeigneter Software kann das in (111) gegebene Integral für $x(\varphi,n)$ problemlos numerisch ausgewertet werden, so wie es schon bei der Erzeugung der obigen Grafiken für die Eikurvenfunktionen geschehen ist.

Dennoch ist die Rückführung des Bogenintegrals

$$x(\varphi,n) = n \cdot \int_0^\varphi \sin^{n-1}(\phi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)} d\phi , \left| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2 \cdot \pi , n \text{ ungerade} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi , n \text{ gerade} \end{array} \right. , k^2 = 1 - \frac{1}{n^2} , \quad (117)$$

für höhere n auf wenige Grundintegrale mit bekannten Lösungsfunktionen von Interesse.

Im Abschnitt 4.1. wurde für das Integral (30) $I_n(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sin^n(\phi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)}} d\phi$ (118a)

die Rekursionsformel (32) hergeleitet:

$$\left| \begin{aligned} (n+3) \cdot k^2 \cdot I_{n+4}(k,\varphi) - (n+2) \cdot (1+k^2) \cdot I_{n+2}(k,\varphi) + (n+1) \cdot I_n(k,\varphi) &= R(k,\varphi) \\ R(k,\varphi) &= \sin^{n+1}(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)} . \end{aligned} \right. \quad (118b)$$

Wegen $\sin^{n-1}(\phi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)} = \frac{\sin^{n-1}(\phi) - k^2 \cdot \sin^{n+1}(\phi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)}}$ besteht der Zusammenhang

$$\underline{x(\varphi,n) = n \cdot \{ I_{n-1}(k,\varphi) - k^2 \cdot I_{n+1}(k,\varphi) \}} , k^2 = k^2(n) = 1 - 1/n^2 . \quad (118c)$$

Daraus folgt nach (118b), dass $x(\varphi, n)$ für ungerades n durch I_0, I_2, R und für gerades n durch I_1, I_3, R darstellbar ist.

Für die Integrale I_0, I_2 gilt

$$I_0(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)}} d\phi = F(k, \varphi), \quad I_2(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sin^2(\phi)}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\phi)}} d\phi = D(k, \varphi), \quad (119a)$$

$$k^2 D(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1 - (1-k^2 \sin^2 \phi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = F(k, \varphi) - \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2(\phi)} d\phi = F(k, \varphi) - E(k, \varphi). \quad (119b)$$

$E(k, \varphi), F(k, \varphi), D(k, \varphi)$ sind die *unvollständigen* elliptischen Integrale.²⁹ Die zugehörigen vollständigen elliptischen Integrale ergeben sich für $\varphi = \pi/2$.

$$\mathbf{K}(k) = F(k, \pi/2), \quad \mathbf{E}(k) = E(k, \pi/2), \quad \mathbf{D}(k) = D(k, \pi/2). \quad \Rightarrow (34)$$

Für die Integrale I_1, I_3 gilt³⁰

$$\int_0^\varphi \frac{\sin \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = -\frac{1}{k} \ln \left(k \cdot \cos \phi + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} \right) \Big|_0^\varphi = \frac{1}{k} \ln \frac{1+k}{k \cdot \cos \varphi + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

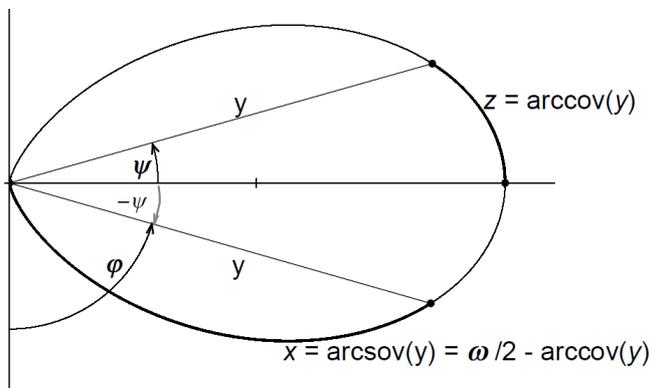
$$I_1(k, \varphi) = \frac{1}{k} \ln \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - k \cos \varphi}{1-k} =: \mathbf{I}(k, \varphi) \quad (120a)$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^3 \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi = \frac{\cos \phi \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}{2k^2} \Big|_0^\varphi + \frac{1+k^2}{2k^2} \cdot \int_0^\varphi \frac{\sin \phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} d\phi,$$

$$I_3(k, \varphi) = \frac{1+k^2}{2k^2} \mathbf{I}(k, \varphi) - \frac{1 - \cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{2k^2}. \quad (120b)$$

$$\mathbf{I}_1(k) = I_1(k, \pi/2) = \mathbf{I}(k, \pi/2), \quad \mathbf{I}_3(k) = I_3(k, \pi/2). \quad \Rightarrow (35)$$

Unter Verwendung der Formeln (118)-(120) stellen wir für die Bogenintegrale einiger $Ek(n)$ die Lösungsfunktionen $x(\varphi, n)$ zusammen, (weitgehend ohne Angabe der Zwischenschritte).



$$y = \sin^n(\varphi) = \cos^n(\psi), \quad \varphi + \psi = \pi/2, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2.$$

Ersetze in $x = x(\varphi, n)$ den Winkel φ durch y :

$$x = \text{arcsov}(y, n) \\ = \omega(n)/2 - \text{arccov}(y, n) = \omega/2 - z, \\ 0 \leq y \leq 1.$$

²⁹ Ausführlich behandelt von TRICOMI/KRAFFT (*Fußnote* 18). Tabellen in JAHNKE/EMDE (*Fußnote* 10).

³⁰ Siehe z.B. GRADSTEIN/RYSHIK: *Tafeln*, Thun, Frankfurt/M 1981 Formeln 2.584 2.+7.

$$\underline{Ek(2)}: \quad y = \sin^2(\varphi) = \cos^2(\psi),$$

$$x(\varphi, 2) = \frac{1}{8} I(\sqrt{3}/2, \varphi) + 1 - \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi},$$

$$\left| \begin{aligned} \omega(2) = x(\pi, 2) &= 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(2 + \sqrt{3}) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arsinh}(\sqrt{3}) \\ x(\varphi, 2) &= \frac{\omega(2)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \ln(\sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi} - \sqrt{3} \cos \varphi) - \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right. \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccov}(y, 2) &= \frac{1}{2} \sqrt{1-y} \cdot \sqrt{4-3y} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \ln(\sqrt{4-3y} + \sqrt{3-3y}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot [\sqrt{4-3y} \cdot \sqrt{3-3y} + \operatorname{arsinh}(\sqrt{3-3y})]. \end{aligned} \quad (121a)$$

$$\underline{Ek(4)}: \quad y = \sin^4(\varphi) = \cos^4(\psi),$$

$$x(\varphi, 4) = \frac{-29}{16} I_3(\sqrt{15}/4, \varphi) + 2 \cdot I_1(\sqrt{15}/4, \varphi) - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{16 - 15 \sin^2 \varphi},$$

$$\left| \begin{aligned} \omega(4) = x(\pi, 4) &= \frac{29}{15} + \frac{61\sqrt{15}}{900} \ln(4 + \sqrt{15}) = \frac{29}{15} + \frac{61\sqrt{15}}{900} \operatorname{arsinh}(\sqrt{15}) \\ x(\varphi, 4) &= \frac{\omega(4)}{2} + \frac{61\sqrt{15}}{1800} \cdot \ln(\sqrt{16 - 15 \sin^2 \varphi} - \sqrt{15} \cos \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{29}{30} + \sin^2 \varphi \right) \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{16 - 15 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right. \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccov}(y, 4) &= \frac{1}{4} \left(\frac{29}{30} + \sqrt{y} \right) \sqrt{1-\sqrt{y}} \sqrt{16-15\sqrt{y}} + \frac{61\sqrt{15}}{1800} \ln(\sqrt{16-15\sqrt{y}} + \sqrt{15-15\sqrt{y}}) \\ &= \frac{\sqrt{15}}{60} \cdot \left[\left(\frac{29}{30} + \sqrt{y} \right) \cdot \sqrt{16-15\sqrt{y}} \cdot \sqrt{15-15\sqrt{y}} + \frac{61}{30} \cdot \operatorname{arsinh}(\sqrt{15-15\sqrt{y}}) \right]. \end{aligned} \quad (122a)$$

$$\underline{Ek(3)}: \quad y = \sin^3(\varphi) = \cos^3(\psi),$$

$$x(\varphi, 3) = \frac{-7}{9} I_2(\sqrt{8}/3, \varphi) + I_0(\sqrt{8}/3, \varphi) - \frac{1}{3} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{9 - 8 \sin^2 \varphi},$$

$$\left| \begin{aligned} x(\varphi, 3) &= \frac{1}{8} \cdot [F(\sqrt{8}/3, \varphi) + 7 \cdot E(\sqrt{8}/3, \varphi)] - \frac{1}{3} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{9 - 8 \sin^2 \varphi} \\ \omega(3) &= \frac{1}{4} \cdot [\mathbf{K}(\sqrt{8}/3) + 7 \cdot \mathbf{E}(\sqrt{8}/3)] \end{aligned} \right. \quad (123)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsin}(y, 3) &= \frac{1}{8} [F(\sqrt{8}/3, \varphi) + 7 \cdot E(\sqrt{8}/3, \varphi)] - \frac{1}{3} y^{1/3} \cdot \sqrt{1-y^{2/3}} \cdot \sqrt{9-8y^{2/3}} \\ &\quad \text{mit } \varphi = \arcsin(y^{1/3}). \end{aligned} \quad (123a)$$

Wir fügen eine Wertetabelle an.

$\varphi / ^\circ$	$Ek(1)$		$Ek(2)$		$Ek(3)$		$Ek(4)$	
	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.0524	0.0523	0.0027	0.0027	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
6	0.1047	0.1045	0.0109	0.0109	0.0011	0.0011	0.0001	0.0001
9	0.1571	0.1564	0.0245	0.0245	0.0038	0.0038	0.0006	0.0006
12	0.2094	0.2079	0.0433	0.0432	0.0090	0.0090	0.0019	0.0019
15	0.2618	0.2588	0.0673	0.0670	0.0174	0.0173	0.0045	0.0045
18	0.3142	0.3090	0.0961	0.0955	0.0296	0.0295	0.0091	0.0091
21	0.3665	0.3584	0.1295	0.1284	0.0462	0.0460	0.0165	0.0165
24	0.4189	0.4067	0.1673	0.1654	0.0677	0.0673	0.0275	0.0274
27	0.4712	0.4540	0.2092	0.2061	0.0943	0.0936	0.0427	0.0425
30	0.5236	0.5000	0.2546	0.2500	0.1263	0.1250	0.0629	0.0625
33	0.5760	0.5446	0.3034	0.2966	0.1636	0.1616	0.0887	0.0880
36	0.6283	0.5878	0.3551	0.3455	0.2062	0.2031	0.1205	0.1194
39	0.6807	0.6293	0.4093	0.3960	0.2538	0.2492	0.1587	0.1569
42	0.7330	0.6691	0.4655	0.4477	0.3062	0.2996	0.2033	0.2005
45	0.7854	0.7071	0.5233	0.500	0.3628	0.3536	0.2542	0.2500
48	0.8378	0.7431	0.5824	0.5523	0.4231	0.4104	0.3111	0.3050
51	0.8901	0.7771	0.6423	0.6040	0.4864	0.4694	0.3734	0.3648
54	0.9425	0.8090	0.7027	0.6545	0.5519	0.5295	0.4403	0.4284
57	0.9948	0.8387	0.7631	0.7034	0.6191	0.5899	0.5109	0.4947
60	1.0472	0.8660	0.8233	0.7500	0.6870	0.6495	0.5841	0.5625
63	1.0996	0.8910	0.8830	0.7939	0.7549	0.7074	0.6587	0.6303
66	1.1519	0.9135	0.9419	0.8346	0.8220	0.7624	0.7335	0.6965
69	1.2043	0.9336	1.0000	0.8716	0.8879	0.8137	0.8073	0.7596
72	1.2566	0.9511	1.0570	0.9045	0.9519	0.8602	0.8790	0.8181
75	1.309	0.9659	1.1129	0.9330	1.0136	0.9012	0.9475	0.8705
78	1.3614	0.9781	1.1679	0.9568	1.0729	0.9359	1.0124	0.9154
81	1.4137	0.9877	1.2218	0.9755	1.1299	0.9635	1.0734	0.9517
84	1.4661	0.9945	1.2751	0.9891	1.1848	0.9837	1.1306	0.9783
87	1.5184	0.9986	1.3278	0.9973	1.2381	0.9959	1.1849	0.9945
90	1.5708	1.0000	1.3802	1.0000	1.2906	1.0000	1.2375	1.0000

Beispiele: $\varphi = 30^\circ \Rightarrow x(\varphi, 2) = 0.2546, \quad y(\varphi, 2) = 0.25,$
 $\psi = 30^\circ \Rightarrow z(\psi, 4) = \omega(4)/2 - x(90^\circ - \psi, 4) = 1.2375 - 0.5841 = 0.6534.$
 $\text{arcsov}(-0.125, 3) = -\text{arcsov}(0.125, 3) = 0.1263,$
 $\text{cov}(0.8, 3) = \text{cov}(-0.8, 3) = \text{sov}(-0.8 + 1.2906, 3) = \text{sov}(0.4906, 3) \approx 0.4694 + 0.0039 = 0.4733.$

8.3. Bogenlängen auf der Ek(2)

Die Berechnungen erfolgen für $\lambda = 1$. Bei Bedarf können die Bogen- und Streckenlängen mit einem geeigneten Maßstabfaktor λ multipliziert werden.

Beispiel 1. Mittels Formeln (121a) und (11) folgt für die Länge des aufsteigenden Bogens

$$\begin{aligned} \overline{OP}_{\max} &= \omega/2 - \operatorname{arccov}(\cos^2(\psi_{\max})) = \omega/4 + [\omega/4 - \operatorname{arccov}(2/3)] \\ &= \frac{\omega}{4} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + 1)^2} \right] \approx \frac{\omega}{4} + 0,0274076 \approx 1,039716 \cdot \frac{\omega}{4}. \end{aligned}$$

Beispiel 2. Eine einfachere Beziehung gilt für den Radiusvektor $y = 5/6$

$$\operatorname{arccov}(5/6) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(\sqrt{3/2} + \sqrt{1/2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) = \frac{\omega}{4} - \frac{1}{4}.$$

Um das Argument des Logarithmus in der Formel (121a) zu vereinfachen, setzen wir

$$u := (\sqrt{4-3 \cdot y}) + \sqrt{3-3 \cdot y} = (7-6 \cdot y) + 2 \cdot \sqrt{(4-3 \cdot y) \cdot (3-3 \cdot y)} = (7-6 \cdot y) + \sqrt{(7-6 \cdot y)^2 - 1}$$

mit $1/u = (7-6 \cdot y) - \sqrt{(7-6 \cdot y)^2 - 1}$ und formen (121a) geeignet um:

$$\operatorname{arccov}(y) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2 \cdot \sqrt{4-3 \cdot y} \cdot \sqrt{3-3 \cdot y} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(\sqrt{4-3 \cdot y} + \sqrt{3-3 \cdot y})^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(u - \frac{1}{u} \right) + \ln(u) \right).$$

Wird y durch u ausgedrückt, so gilt

$$\underline{y(u) = \frac{48 - (7-u)^2}{12 \cdot u}}, \quad \underline{\operatorname{arccov}(y(u)) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) + \ln(u) \right)}, \quad 1 \leq u \leq \sqrt{48} + 7. \quad (124)$$

Beispiel 2. (s. o.) Für $y = 5/6$ gilt $u = 2 + \sqrt{3}$, $u - 1/u = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

Beispiel 3. $u = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $y = 0$, $\operatorname{arccov}(0) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (4\sqrt{3} + 2 \cdot \ln(2 + \sqrt{3})) = \frac{\omega}{2}$.

Beispiel 4. $u = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3/2} + \sqrt{1/2}$, $y = \frac{14 - \sqrt{6}}{12}$, $\operatorname{arccov}(y) = \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot (\sqrt{2} + \ln(2 + \sqrt{3}))$.

Beispiel 5. $u = 7$, $y = 4/7$, $\operatorname{arccov}\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{24}{7} + \ln 7\right)$.

Ein Variante der Formel (124) folgt aus dem Ansatz $u = a + \sqrt{a^2 - 1}$ mit $y = (7-a)/6$

$$\operatorname{arccov}\left(\frac{7-a}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\sqrt{a^2 - 1} + \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) \right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \int_1^a \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad 1 \leq a \leq 7. \quad (124a)$$

Beispiel 1. (s.o.) $a = 3$, $\operatorname{arccov}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})) = \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \ln(1 + \sqrt{2})^2$.

Beispiel 6. $a = 5$, $\operatorname{arccov}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot (2\sqrt{6} + \ln(5 + 2\sqrt{6})) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.

In diesen beiden Beispielen ergänzen sich die Längen der Radiusvektoren zu $1 = 2/3 + 1/3$.

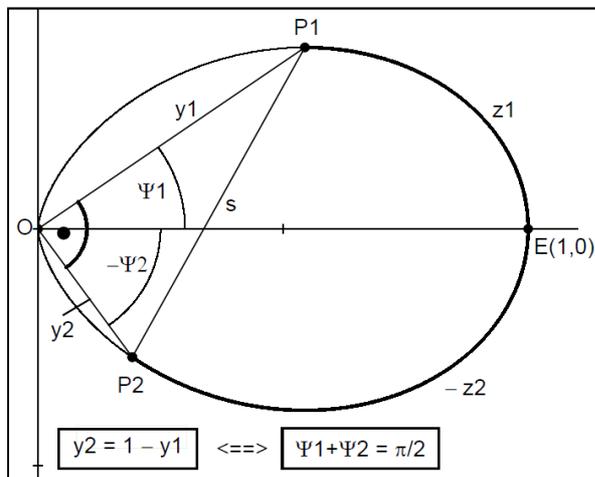
Auf der $Ek(2)$ gilt $y_2 := 1 - y_1 = 1 - \cos^2 \psi_1 = \sin^2 \psi_1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right) = \cos^2 \psi_2$.

Die Richtungswinkel von y und $1 - y$ sind Komplementwinkel.

Mit $h(y) := \sqrt{1+3y} \cdot \sqrt{3y} + \frac{1}{2} \cdot \ln(\sqrt{1+3y} + \sqrt{3y})^2$ gilt $\operatorname{arccov}(1-y, 2) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot h(y)$. (125)

Die Summe der „komplementären“ Bogenlängen ist folglich $z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} (h(y_2) + h(y_1))$.

Beispiele 1.+ 6. (s.o.)



$$y_1 = 2/3, \quad \psi_1 = \arccos(\sqrt{2/3}) \approx 35,264^\circ$$

$$y_2 = 1/3, \quad \psi_2 = \arccos(\sqrt{1/3}) \approx 54,736^\circ$$

$$s = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{5}/3 \approx 0,7454$$

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (h(1/3) + h(2/3))$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left\{ \sqrt{2} + \sqrt{6} + \ln\left[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2})\right] \right\}$$

$$\approx 1,7007.$$

Aus der Darstellung (124) folgt für den Arcuscosinus ovalicus der $Ek(2)$ die Additionsformel

$$\operatorname{arccov}(y(u)) + \operatorname{arccov}(y(v)) - \operatorname{arccov}(y(u \cdot v)) = \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{(1-u) \cdot (1-v) \cdot (1-u \cdot v)}{u \cdot v} =: -R(u, v). \quad (126)$$

$$1 \leq u, v, u \cdot v \leq \sqrt{48+7} = (2 + \sqrt{3})^2.$$

Beachte $\ln u + \ln v - \ln(uv) = 0$ und

$$u - \frac{1}{u} + v - \frac{1}{v} - uv + \frac{1}{uv} = \frac{u^2v - v + v^2u - u + 1 - u^2v^2}{uv} = \frac{(-u-v)(1-uv) + (1+uv)(1-uv)}{uv}.$$

Beispiele 7.

$$u = v = 2; \quad 2 \cdot \operatorname{arccov}\left(\frac{23}{24}\right) = \operatorname{arccov}\left(\frac{13}{16}\right) - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

$$u = 2, v = 4; \quad \operatorname{arccov}\left(\frac{23}{24}\right) + \operatorname{arccov}\left(\frac{13}{16}\right) = \operatorname{arccov}\left(\frac{47}{96}\right) - \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{64}.$$

Der rechte Grenzwert folgt mit $y_1(4)=1, y_2(4)=0, y_1'(4)=0, y_2'(4)=-1/3, y_1''(4)=-1/72$ und $\lim_{p \rightarrow 4} (1-y_1)/y_2^2 = \lim_{p \rightarrow 4} (-y_1')/2y_2 y_2' = \lim_{p \rightarrow 4} 1/(2y_2') \cdot \lim_{p \rightarrow 4} (-y_1'')/y_2' = 1/16$ aus

$$\overline{OS} - y_2\sqrt{y_2} = \frac{y_1\sqrt{y_1} - y_2\sqrt{y_2}}{y_1\sqrt{1-y_1} - (-y_2\sqrt{1-y_2})} \cdot (0 - (-y_2\sqrt{1-y_2})) = \frac{y_1\sqrt{y_1} - y_2\sqrt{y_2}}{\frac{y_1}{\sqrt{1-y_2}} \cdot \frac{\sqrt{1-y_1}}{y_2} + 1}.$$

Beispiel 9. $R := \frac{\omega}{6}, \frac{\omega}{2} - R = \frac{\omega}{3}, p = 4 \cdot (1-R) = \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 2,159769,$

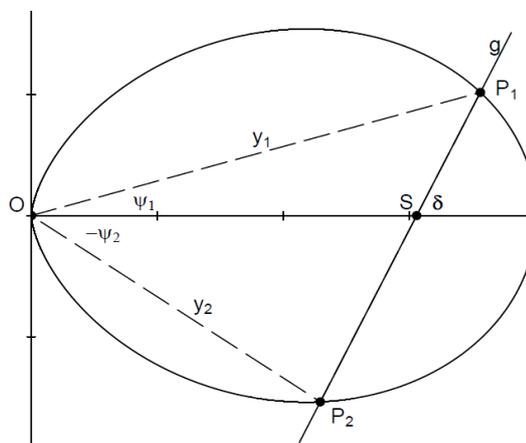
$$y_{1,2} = \frac{7-p}{6} \pm \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{(p+2) \cdot (p-2)} \approx \begin{cases} 0,924374 \\ 0,689036 \end{cases}, \psi_{1,2} = \arccos(\sqrt{y_{1,2}}) \approx \begin{cases} 15,962^\circ \\ 33,893^\circ \end{cases},$$

$$m = \frac{y_1\sqrt{1-y_1} - (-y_2\sqrt{1-y_2})}{y_1\sqrt{y_1} - y_2\sqrt{y_2}} \approx 2,015428,$$

$$\delta = \arctan(m) \approx 63,611^\circ,$$

$$\overline{OS} = y_2\sqrt{y_2} + \frac{y_2 \cdot \sqrt{1-y_2}}{m} \approx 0,762604.$$

Die Gerade g teilt den Umfang der $Ek(2)$ im Verhältnis 2 : 1.



Beispiel 10. $R := \frac{\omega}{8}, \frac{\omega}{2} - R = \frac{3 \cdot \omega}{8}, p = 4 - \frac{\omega}{2} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 2,619827,$

$$y_{1,2} = \frac{6+\omega}{12} \pm \frac{\sqrt{3}}{24} \sqrt{(12-\omega) \cdot (4-\omega)} \approx \begin{cases} 0,974275 \\ 0,485783 \end{cases}, \psi_{1,2} = \arccos(\sqrt{y_{1,2}}) \approx \begin{cases} 9,230^\circ \\ 45,815^\circ \end{cases},$$

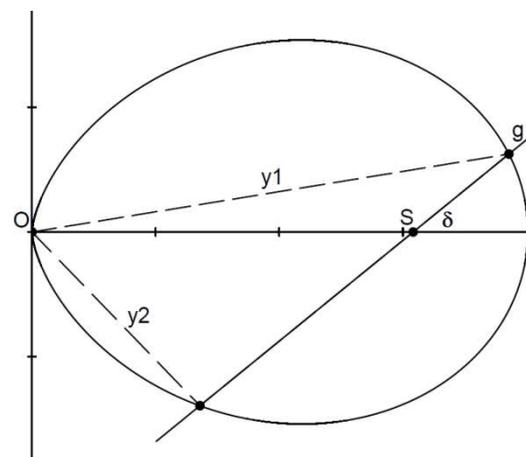
$$y_1 + y_2 = 1 + \frac{\omega}{6},$$

$$m \approx 0,80987,$$

$$\delta = \arctan(m) \approx 39,003^\circ,$$

$$\overline{OS} \approx 0,768712.$$

Die Gerade g teilt den Umfang der $Ek(2)$ im Verhältnis 5 : 3.



8.4. Bogenlängen auf der Ek(3)

Auch hier gilt: Die Berechnungen erfolgen für $\lambda=1$. Bei Bedarf können die Bogen- und Streckenlängen mit einem geeigneten Maßstabfaktor λ multipliziert werden.

Für die Bogenlängen auf der Ek(3) gilt eine der Formel 8.3. (126) ähnliche Additionsformel.

Sei $u := y^{1/3} = \sin(\varphi)$, $w(u) := \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1-u^2} \cdot \sqrt{9-8 \cdot u^2}$ und gilt für u_1, u_2, u_3	
$w(u_3) \equiv \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1-u_1^2} \cdot \sqrt{1-u_2^2} \cdot \sqrt{9-8 \cdot u_3^2} - \frac{1}{9} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot (9-8 \cdot u_3^2)$,	(128*)
so folgt $\frac{\operatorname{arcsov}(y_1,3) + \operatorname{arcsov}(y_2,3) - \operatorname{arcsov}(y_3,3) = R}{}$	(128a)
bzw. $\frac{\operatorname{arccov}(y_1,3) + \operatorname{arccov}(y_2,3) - \operatorname{arccov}(y_3,3) = \frac{\omega(3)}{2} - R}{}$	(128b)
mit $R := \frac{7}{9} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 - u_1 \cdot w(u_1) - u_2 \cdot w(u_2) + u_3 \cdot w(u_3)$.	

Diese Formel folgt aus (123a) und den Additionstheoremen der elliptischen Integrale ³¹:

Falls $\cos(\varphi_3) \equiv \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2(\varphi_3)}$,	
folgt $F(k, \varphi_1) + F(k, \varphi_2) + F(k, \varphi_3) = 0$	
und $E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) + E(k, \varphi_3) = -k^2 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3)$.	(129)

Wir ersetzen in (129) den Winkel φ_3 durch $(-\varphi_3)$ und beachten dann

$$\sin(-\varphi_3) = -\sin(\varphi_3), \cos(-\varphi_3) = \cos(\varphi_3), E(k, -\varphi_3) = -E(k, \varphi_3), F(k, -\varphi_3) = -F(k, \varphi_3).$$

Aus (128a) folgt (128b) wegen (114b).

Beispiel 1. Länge des aufsteigenden Bogens OP_{\max} .

Formel (11): $\psi_{\max} = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30^\circ$, $\varphi_{\max} = 90^\circ - \psi_{\max} = 60^\circ$, $u_{\max} = \sqrt{3}/2$.

Setze $u_1 = u_2 = u_{\max}$, $u_3 = 1$. Prüfe (128*): $0 \equiv \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = 0$. $R = \frac{1}{12}$.

$$\operatorname{arccov}(y_{\max}) + \operatorname{arccov}(y_{\max}) = \operatorname{arccov}(1) + \frac{\omega}{2} - R = 0 + \frac{\omega}{2} - \frac{1}{12}.$$

$$\underline{OP_{\max} = \frac{\omega}{2} - \operatorname{arccov}(y_{\max}) = \frac{\omega}{4} + \frac{1}{24}.}$$

Der aufsteigende Bogen ist um $\lambda/12$ länger als der absteigende Bogen.

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\omega}{4} - \frac{1}{24}\right) = \operatorname{sov}\left(\frac{\omega}{4} + \frac{1}{24}\right) = y_{\max} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{3}.$$

³¹ Siehe TRICOMI/KRAFT (Fußnote 18), Seite 297, Formeln 3.42* - 3.43*.

Ohne Beweis erwähnen wir das Additionstheorem von EULER (1761)³² :

die Bedingung (128*) wird erfüllt mit u_1, u_2 und $u_3 := 9 \cdot \frac{u_1 \cdot w(u_2) + u_2 \cdot w(u_1)}{9 - 8 \cdot u_1^2 \cdot u_2^2}$. (130)

Für *Beispiel 1* erhalten wir mit $u_1 = u_2 = \sqrt{3}/2$ aus (130) $u_3 = 1$.

Beispiel 2. $u_1 := \sqrt{2}/4, u_2 := \sqrt{14}/4, (130) \Rightarrow u_3 := 9\sqrt{2}/13 \cdot \underline{u_1^2 + u_2^2 = 1}$.

Prüfe (128*): $5\sqrt{7}/169 \equiv 5\sqrt{7}/104 - 25\sqrt{7}/1352. R = -327\sqrt{14}/8788 \approx -0,1392.$

$y_1 = \sqrt{2}/32 \approx 0,0442, y_2 = 7\sqrt{14}/32 \approx 0,8185, y_3 = 1458\sqrt{2}/2197 \approx 0,9385.$

$\varphi_1 \approx 20,70^\circ, \varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1 \approx 69,30^\circ, \varphi_3 \approx 78,26^\circ.$

$$\arcsov\left(\frac{\sqrt{2}}{32}\right) + \arcsov\left(\frac{7\sqrt{14}}{32}\right) = \arcsov\left(\frac{1458 \cdot \sqrt{2}}{2197}\right) - \frac{327\sqrt{14}}{8788}.$$

Hinweis: Das Ergebnis aus (130) und das (*)-Kriterium widersprechen sich gelegentlich weil in (129) „geeignete“ Winkel zu wählen sind!

Bsp.: $u_1 := 1/\sqrt{2}, u_2 := 1, (130) \Rightarrow u_3 = 3/\sqrt{10}, (108*): \sqrt{2}/10 \neq 0 - \sqrt{2}/10 !?$

Statt $u_2 := \sin(90^\circ) = 1$ kommt hier $u_2 := \sin(-90^\circ) = -1$ in Betrag. Vgl. aber *Beispiel 3!*

Analog zu 8.3 (128) betrachten wir nachfolgend den Sonderfall $0 \leq u_1 \leq u_2 < 1, u_3 = 1$.

Mit den Festlegungen $u_1 = \sin(\varphi), u_2 = \sin(\varphi + \delta), u_3 = 1$ reduziert sich Bedingung (128*)

auf $0 \equiv \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi + \delta) - \frac{1}{3} \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi + \delta)$ und (128) erhält folgende Form:

Sei	$y_1 = \sin^3(\varphi) = u_1^3, y_2 = \sin^3(\varphi + \delta) = u_2^3, 0 < \varphi \leq \varphi + \delta < \pi/2,$	(131*)
und gilt	$\tan(\varphi) \cdot \tan(\varphi + \delta) \equiv 3,$	
so folgt	$\underline{\arcsov(y_1) + \arcsov(y_2) = \omega/2 + R}$	
bzw.	$\underline{\arccov(y_1) + \arccov(y_2) = \omega/2 - R}$	

mit	$R := \frac{7}{9} \cdot u_1 \cdot u_2 - \frac{1}{3} u_1 \cdot \sqrt{1 - u_1^2} \sqrt{9 - 8 \cdot u_1^2} - \frac{1}{3} u_2 \cdot \sqrt{1 - u_2^2} \sqrt{9 - 8 \cdot u_2^2}.$	(131c)
-----	---	--------

Aus (131*) folgt, dass entweder φ oder δ vorgegeben werden können.

Beispiel 3. $\varphi := 45^\circ \rightarrow \tan(\varphi + \delta) = 3 \rightarrow u_1 = 1/\sqrt{2}, u_2 = 3/\sqrt{1+3^2}, R = \frac{\sqrt{5}}{150}.$

$$\arcsov\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \arcsov\left(\frac{27\sqrt{10}}{100}\right) = \frac{\omega}{2} + \frac{\sqrt{5}}{150}.$$

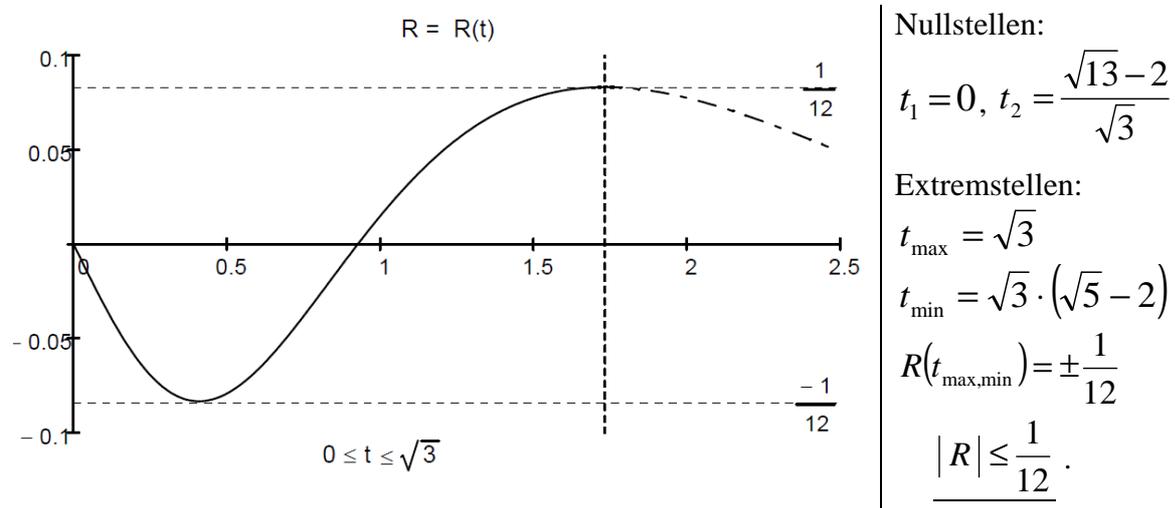
$$[\delta = \arctan(3) - \arctan(1) = \arctan\left(\frac{3-1}{1+3 \cdot 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,565^\circ.]$$

³² KOECHER/KRIEG: Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer Berlin 1998, Seite 7

Das Formelsystem (131) kann mit Hilfe des Additionstheorems des Tangens ausschließlich auf den Parameter $\tan(\varphi)$ zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{t := \tan(\varphi) \cdot \tan(\varphi + \delta) = \frac{3}{t}}, \quad \tan(\delta) = \frac{3-t^2}{4 \cdot t}, \quad t = \sqrt{3 + 4 \tan^2(\delta)} - 2 \tan(\delta), \\
 t^2 \leq t \cdot \tan(\varphi + \delta) = 3, \quad R(t) = \frac{t \cdot [64 \cdot t^2 - 3 \cdot (1+t^2) \cdot (9+t^2)]}{3 \cdot \sqrt{[(1+t^2) \cdot (9+t^2)]^3}}. \\
 u_1 = \sin(\varphi) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad u_2 = \sin(\varphi + \delta) = \frac{3}{\sqrt{9+t^2}}, \quad y_i = u_i^3. \\
 \text{arcsov}(y_1) + \text{arcsov}(y_2) = \omega/2 + R, \quad \text{arccov}(y_1) + \text{arccov}(y_2) = \omega/2 - R, \\
 \text{sov}(x) = u_1^3 \Leftrightarrow \text{cov}(x - R) = u_2^3.
 \end{aligned} \tag{132}$$

Zur Abschätzung der „Abweichung“ R stellen wir $R = R(t)$ grafisch dar.



Die Nullstellen bzw. Extremstellen ergeben sich aus

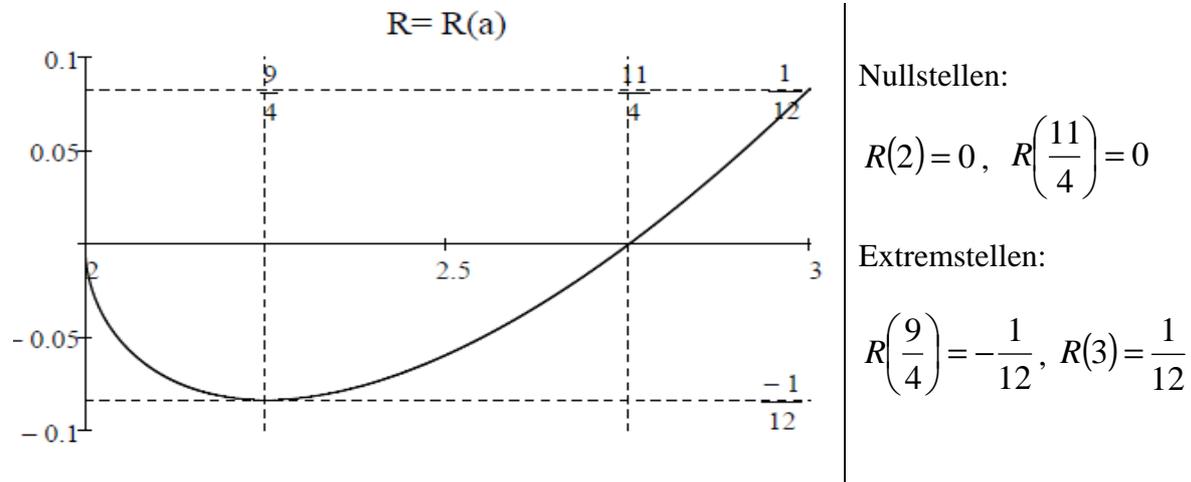
$$\begin{aligned}
 t \cdot (-3 \cdot t^4 + 34 \cdot t^2 - 27) = 0 \quad \text{mit} \quad t_2^2 = \frac{17 - 4\sqrt{13}}{3} = \left(\frac{\sqrt{13} - 2}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad \text{bzw.} \\
 \frac{d}{dt} R(t) = \frac{(t^2 - 3) \cdot (t^2 + 3) \cdot (t^4 - 54 \cdot t^2 + 9)}{(t^4 + 10 \cdot t^2 + 9)^{5/2}} = 0 \quad \text{mit} \quad t_{\min}^2 = 3 \cdot (9 - 4\sqrt{5}) = (\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 2))^2.
 \end{aligned}$$

Ergänzend fügen wir zwei alternative Darstellungen für die u_i an:

$$\begin{aligned}
 a := 2 + \frac{16 \cdot t^2}{(1+t^2) \cdot (9+t^2)} \quad \Rightarrow \quad u_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a \mp \sqrt{(6-a) \cdot (3-a)}}. \\
 R(a) = \frac{4 \cdot (a-2) - 3}{12} \cdot \sqrt{a-2}, \quad 2 \leq a \leq 3. \\
 u_1 \cdot u_2 = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{a-2}, \quad u_1^2 + u_2^2 = \frac{a}{2}, \quad u_1^4 + u_2^4 = \frac{a^2}{4} - \frac{9}{8} \cdot (a-2).
 \end{aligned} \tag{133}$$

Mit der Festlegung $u_{1,2}^2 := \frac{a \mp b}{4}$ erhalten wir aus (132) $t^2 = \frac{a-b}{4-a+b} = \frac{9 \cdot (4-a-b)}{a+b}$!

Daraus folgen $b = \sqrt{18 - 9a + a^2}$ und die Beziehungen (133).



Setzen wir $c^2 := \frac{6-a}{3-a}$, d. h. $a = 3 - \frac{3}{c^2-1}$, so folgt

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{c-2}{c-1}}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{c+2}{c+1}} \quad \text{bzw.} \quad u_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{c^2-2 \mp c}{c^2-1}}, \\
 R(c) &= \frac{c^2-13}{12 \cdot (c^2-1)} \cdot \sqrt{\frac{c^2-4}{c^2-1}}, \quad c \geq 2. \\
 t &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{c-2}{c+2}} \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{6+2 \cdot t^2}{3-t^2} = \sqrt{\frac{6-a}{3-a}}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}.
 \end{aligned} \tag{134}$$

Speziell $R(c=2) = R(c=\sqrt{13}) = 0, R(c=\sqrt{5}) = -1/12, R(c \rightarrow \infty) = 1/12$.

Beispiel 3. (s.o.) $c := 4. \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad R = \frac{3}{12 \cdot 15} \sqrt{\frac{12}{15}} = \frac{\sqrt{5}}{150}. \\
 a &= 3 - \frac{3}{15} = \frac{14}{5}, \quad u_1 \cdot u_2 = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{14}{5}} - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad u_1^2 + u_2^2 = \frac{7}{5} = \frac{1}{2} + \frac{9}{10}.
 \end{aligned}$$

Beispiel 4. $a := 5/2. \Rightarrow c = \sqrt{7}, t = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}} = \sqrt{7}-2$.

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{5 \mp \sqrt{7}}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{16} \sqrt{115 \mp 41 \cdot \sqrt{7}}, \quad R = \frac{7-13}{12 \cdot (7-1)} \sqrt{\frac{7-4}{7-1}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

$$u_{1,2}^4 = \frac{16 \mp 5\sqrt{7}}{32}, \quad u_1^4 + u_2^4 = 1.$$

Nun ausführlicher zu einigen Beispielen:

Beispiel 1. (s.o.) $t_{\max} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(\delta) = 0, \delta = 0^\circ, \varphi = 60^\circ, u_{1,2} = \sqrt{3}/2.$

Alternative: $a := 3.$

$$R = \frac{1}{12} \cdot \arcsov\left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}\right) + \arcsov\left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{12}.$$

Beispiel 5. $t_{\min} = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 2) \Rightarrow \tan(\delta) = \sqrt{3}, \delta = 60^\circ, \varphi \approx 22,24^\circ.$

Alternativen: $a := 9/4, c := \sqrt{5}.$

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{9 \mp 3\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} \mp 1)}{8} \approx \begin{cases} 0,3785 \\ 0,9908 \end{cases}, y_{1,2} = \frac{3 \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} \mp 2)}{32} \approx \begin{cases} 0,0542 \\ 0,9728 \end{cases},$$

$$R = -\frac{1}{12} \cdot \arcsov(y_1) + \arcsov(y_2) = \frac{\omega}{2} - \frac{1}{12}.$$

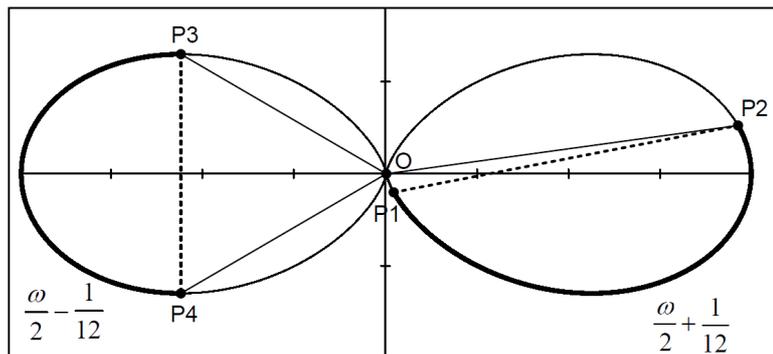
Beispiele 1. + 5.

Die Strecken P_1P_2 und P_3P_4 halbieren den Umfang der EK.

$$\angle P_1OP_2 = 180^\circ - 2\varphi - \delta.$$

$$\angle P_1OP_2 \approx 75,52^\circ,$$

$$\angle P_3OP_4 = 60^\circ.$$



Beispiel 6. $t := (\sqrt{13} - 2)/\sqrt{3} \rightarrow \tan(\delta) = 1/\sqrt{3}, \delta = 30^\circ, \varphi = \varphi_1 \approx 42,83^\circ.$

Alternativen: $a := 11/4, c := \sqrt{13}.$

$$\sin(\varphi_{1,2}) = u_{1,2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{11 \mp \sqrt{13}}, \cos(\varphi_{1,2}) = \sqrt{1 - u_{1,2}^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5 \pm \sqrt{13}},$$

$$y_{1,2} = u_{1,2}^3 = \frac{1}{32} \cdot \sqrt{440 \mp 94 \cdot \sqrt{13}} \approx \begin{cases} 0,3142 \\ 0,8722 \end{cases}, \underline{R = 0}.$$

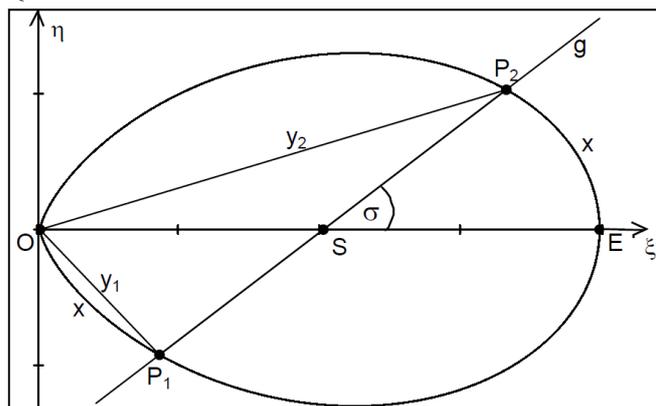
$$\arcsov(y_1) + \arcsov(y_2) = \frac{\omega}{2}$$

$$\text{sov}(x) = y_1 \Leftrightarrow \text{cov}(x) = y_2$$

$$\tan(\sigma) = m = \frac{5}{11} \cdot \sqrt{3}, \cos(\sigma) = \frac{11}{14},$$

$$\sigma \approx 38,21^\circ, \overline{OS} = \frac{81}{160} = \frac{1}{2} + \frac{1}{160}.$$

Die Gerade g halbiert den Umfang der Ek(3).



Zwischenschritte und Ergänzungen: $O(0,0)$, $E(1,0)$, $S(\xi_s, 0)$, $P_1(\xi_1, \eta_1)$, $P_2(\xi_2, \eta_2)$.

$$\xi_{1,2} = u_{1,2}^4 = \frac{1}{128} (67 \mp 11\sqrt{13}), \quad \eta_{1,2} = \mp u_{1,2}^3 \cdot \sqrt{1-u_{1,2}^2} = \frac{\mp \sqrt{3}}{128} (5\sqrt{13} \mp 1).$$

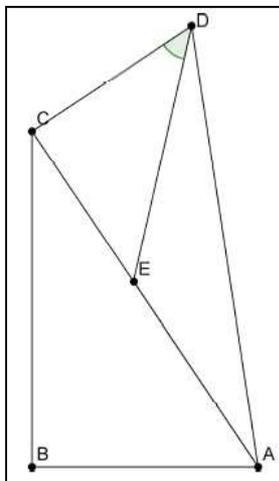
$$\tan(\sigma) = m = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{5}{11} \sqrt{3}, \quad m = \frac{\eta_2 - 0}{\xi_2 - \xi_s} \rightarrow \overline{OS} = \xi_s = \xi_2 - \frac{\eta_2}{m} = \frac{81}{160}.$$

Geradengleichung: $\eta = g(\xi) = \frac{5}{11} \sqrt{3} \cdot \left(\xi - \frac{81}{160} \right).$

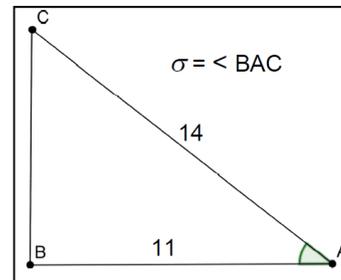
$$\cos(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{11}{14}, \quad \overline{P_1S} = \frac{\xi_s - \xi_1}{\cos(\sigma)} = \frac{7}{320} \cdot (5\sqrt{13} - 1), \quad \overline{P_2S} = \frac{\xi_2 - \xi_s}{\cos(\sigma)} = \frac{7}{320} \cdot (5\sqrt{13} + 1),$$

$$\overline{P_2S} - \overline{P_1S} = \frac{7}{160}, \quad \overline{P_1P_2} = \frac{7}{32} \cdot \sqrt{13}.$$

Konstruktionen der Winkel φ und σ .



- (1) $\triangle ABC : AB \perp BC$
 $\overline{AB} := 2, \overline{BC} := 3$
 $\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{13}$
- (2) $D : CD \perp AC, \overline{AD} := 4$
 $\rightarrow \overline{CD} = \sqrt{3}$
- (3) $E : \overline{AE} := 2$
 $\rightarrow \overline{CE} = \sqrt{13} - 2$
- (4) $\rightarrow \overline{CE} : \overline{CD} = t$
 $\rightarrow \angle CDE = \varphi.$



- (1) $\triangle ABC : AB \perp BC$
 $\overline{AB} := 11, \overline{AC} := 14$
- (2) $\rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \cos(\sigma).$

Für die Geradenparameter Anstieg $m = \tan(\sigma)$ und Achsenabschnitt \overline{OS} existieren relativ einfache Beziehungen zum Vorgabewert a .

Nach einigen Umformungen folgen aus (132) unter Verwendung der obigen Bezeichnungen

$$\tan(\sigma) = m = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{t}{3-t^2} \cdot \frac{(1+t^2) \cdot (9+t^2) + 32 \cdot t^2}{(1+t^2) \cdot (9+t^2) + 8 \cdot t^2} \quad \text{und} \quad \overline{OS} = \xi_s - \frac{\eta_2}{m} = \frac{27}{(9+t^2)^2} \cdot \left(3 - \frac{t}{m} \right).$$

Beachten wir nach (133) wegen $(4-a-\sqrt{(3-a) \cdot (6-a)}) \cdot (4-a+\sqrt{(3-a) \cdot (6-a)}) = a-2$

$$9+t^2 = \frac{4 \cdot a - 4 \cdot \sqrt{(3-a) \cdot (6-a)}}{a-2}, \quad 3-t^2 = \frac{8 \cdot a - 24 + 4 \cdot \sqrt{(3-a) \cdot (6-a)}}{a-2} \quad \text{und} \quad \tan(\delta) = \frac{3-t^2}{4 \cdot t},$$

so folgt

$$\tan(\sigma) \cdot \tan(\delta) = \frac{2 \cdot a - 3}{2 \cdot a}, \quad \overline{OS} = \frac{27 \cdot (a-2)}{16 \cdot (2 \cdot a - 3)}. \tag{135}$$

Die folgende Tabelle enthält die Werte für ausgewählte Beispiele.

a	c	$t=\tan(\varphi)$	$\tan(\delta)$	$\approx \varphi^\circ$ $\approx \delta^\circ$	$u_{1,2}$	$y_{1,2}$	R	$\xi_{1,2}$	$\eta_{1,2}$	$\tan(\sigma)$ $\approx \sigma^\circ$	\overline{OS}
3	∞	$\sqrt{3}$	0	60 0	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{+1}{12}$	$\frac{9}{16}, \frac{9}{16}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16}$	∞ 90	$\frac{9}{16}$
$\frac{23}{8}$	5	$\frac{3\sqrt{7}}{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	48,59 20,70	$\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4}$	$\frac{27}{64}, \frac{7\sqrt{14}}{32}$	$\frac{+\sqrt{14}}{96}$	$\frac{81}{256}, \frac{49}{64}$	$\frac{27\sqrt{7}}{256}, \frac{7\sqrt{7}}{64}$	$\frac{11\sqrt{7}}{23}$ 51,68	$\frac{189}{352}$
$\frac{14}{5}$	4	1	$\frac{1}{2}$	45 26,57	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{27\sqrt{10}}{100}$	$\frac{+\sqrt{5}}{150}$	$\frac{1}{4}, \frac{81}{100}$	$\frac{1}{4}, \frac{27}{100}$	$\frac{13}{14}$ 42,88	$\frac{27}{52}$
$\frac{11}{4}$	$\sqrt{13}$	$\frac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	42,83 30	$\frac{\sqrt{11\mp\sqrt{13}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{220\mp 47\sqrt{13}}}{32}$	0	$\frac{67\mp 11\sqrt{13}}{128}$	$\frac{\sqrt{3}\cdot(5\sqrt{13}\mp 1)}{128}$	$\frac{5\sqrt{3}}{11}$ 38,21	$\frac{81}{160}$
$\frac{30}{11}$	$2\cdot\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	41,88 31,48	$\frac{\sqrt{11}\cdot(30\mp 6\sqrt{3})}{22}$	$\frac{3\sqrt{11}\sqrt{255\mp 117\sqrt{3}}}{242}$	$\frac{-\sqrt{22}}{726}$	$\frac{126\mp 45\sqrt{3}}{242}$	$\frac{3\cdot\sqrt{2}(27\mp\sqrt{3})}{484}$	$\frac{3\sqrt{6}}{10}$ 36,31	$\frac{1}{2}$
$\frac{21}{8}$	3	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	37,76 $=\varphi$	$\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{3\sqrt{6}}{32}, \frac{15\sqrt{15}}{64}$	$\frac{-\sqrt{10}}{96}$	$\frac{9}{64}, \frac{225}{256}$	$\frac{3\sqrt{15}}{64}, \frac{15\sqrt{15}}{256}$	$\frac{\sqrt{15}}{7}$ 28,96	$\frac{15}{32}$
$\frac{5}{2}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}-2$	1	32,85 45	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5\mp\sqrt{7}}}{4}$	$\frac{\sqrt{115-41\sqrt{7}}}{16}$	$\frac{-\sqrt{2}}{24}$	$\frac{16\mp 5\sqrt{7}}{32}$	$\frac{2\sqrt{7}\mp 1}{32}$	$\frac{2}{5}$ 21,80	$\frac{27}{64}$
$\frac{17}{7}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	30 49,11	$\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{21}}{14}$	$\frac{1}{8}, \frac{81\sqrt{21}}{392}$	$\frac{-3\sqrt{21}}{196}$	$\frac{1}{16}, \frac{729}{784}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{81\sqrt{3}}{784}$	$\frac{13\sqrt{3}}{68}$ 18,32	$\frac{81}{208}$
$\frac{9}{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)$	$\sqrt{3}$	22,24 60	$\frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}\mp 1)}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}\mp 2)}{32}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{63\mp 27\sqrt{5}}{128}$	$\frac{3\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}\mp 1)}{128}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$ 10,89	$\frac{9}{32}$
2	2	0	∞	0/90	0, 1	0, 1	0	0, 1	0, 0	0/0	0

8.5. Differentialgleichungen der Eikurvenfunktionen; Taylorentwicklung

Aus der Parameterdarstellung (111) erhalten wir für die Eikurvenfunktionen (111a) die differentiellen Zusammenhänge

$$\frac{d x(\varphi)}{d \varphi} = n \cdot \sin^{n-1}(\varphi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(\varphi)}, \quad \frac{d y(\varphi)}{d \varphi} = n \cdot \sin^{n-1}(\varphi) \cdot \sqrt{1-\sin^2(\varphi)},$$

$$\frac{d z(\psi)}{d \varphi} = n \cdot \cos^{n-1}(\psi) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \cos^2(\psi)}, \quad \frac{d y(\psi)}{d \varphi} = -n \cdot \cos^{n-1}(\psi) \cdot \sqrt{1-\cos^2(\psi)},$$

und mit $\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d \varphi} \cdot \frac{d \varphi}{d x}$, $\frac{d y}{d z} = \frac{d y}{d \psi} \cdot \frac{d \psi}{d z}$ für $0 \leq x \leq \omega/2$ die Differentialgleichungen³³

$$y = \text{sov}(x, n) : \frac{d y}{d x} = \frac{\sqrt{1-y^{2/n}}}{\sqrt{1-k^2 \cdot y^{2/n}}}, \quad y = \text{cov}(z, n) : \frac{d y}{d z} = \frac{-\sqrt{1-y^{2/n}}}{\sqrt{1-k^2 \cdot y^{2/n}}}. \quad (136a,b)$$

Die DGLn (136a,b) lassen sich vereinigen zu $(y')^2 = \frac{1-y^{2/n}}{1-k^2 \cdot y^{2/n}}$, $k^2 = 1-1/n^2$. (136)

Diese DGL wird sowohl für die sov-Funktion als auch die cov-Funktion für alle reellen Argumente erfüllt, $(-\infty < x, z < \infty)$!

Zur Bestätigung verwenden wir die Beziehungen (112,113) und setzen z. B. in (136a)

$$y = \text{sov}(x), \quad y = \text{sov}(\omega/2 - x), \quad y = -\text{sov}(x + \omega), \quad y = \text{sov}(x + 2\omega), \quad y = -\text{sov}(-x).$$

Analog verfahren wir in (136b) für $y = \text{cov}(z)$.

In den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf das Intervall $-\omega/2 \leq x, z \leq \omega/2$.

Wir setzen $g(y, n) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1-y^{2/n}}{1-k^2 \cdot y^{2/n}}$ mit $g'(y) = \frac{d}{dy} g(y) = -\frac{1}{n^3} \cdot \frac{y^{2/n}}{y \cdot (1-k^2 \cdot y^{2/n})^2}$.

Aus $\frac{d}{dx} (y'(x))^2 = 2y'(x) \cdot y''(x) = 2g'(y) \cdot y'(x)$, $\frac{d}{dz} (y'(z))^2 = 2y'(z) \cdot y''(z) = 2g'(y) \cdot y'(z)$

folgen die zweiten Ableitungen

$$y = \text{sov}(x, n), \quad y = \text{cov}(z, n) : \underline{y'' = g'(y, n) = -\frac{1}{n^3} \cdot \frac{y^{2/n}}{y \cdot (1-k^2 y^{2/n})^2}}. \quad (137)$$

Für $y = \text{cov}(z, n)$ folgt im Grenzfall $y' \rightarrow 0$ aus (136b) $y \rightarrow 1$ und damit aus (137) $y'' \rightarrow -n$. Also ist $\text{cov}(0, n) = 1$, $\text{cov}'(0, n) = 0$, $\text{cov}''(0, n) = -n$.

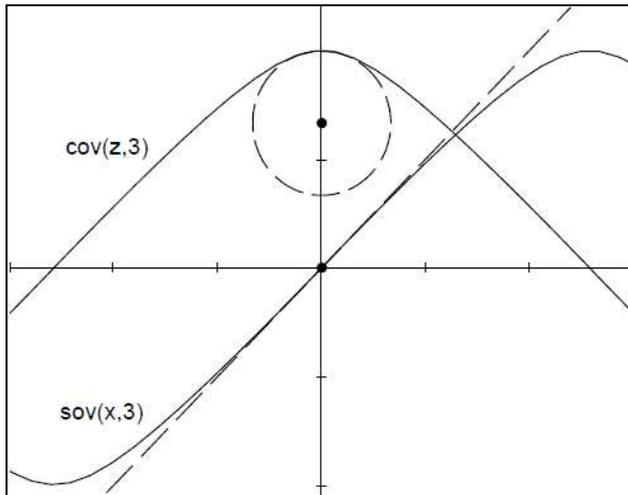
Für $y = \text{sov}(x, n)$ folgt für $x = 0$ mit $y = \text{sov}(0, n) = 0$ aus (136a) $\text{sov}'(0, n) = 1$.

Für die zweite Ableitung gilt in Abhängigkeit von n : $\text{sov}''(0, 1) = 0$,

$$\text{sov}''(x \rightarrow \pm 0, 2) = g'(y \rightarrow \pm 0, 2) = \mp 1/8, \quad \text{sov}''(x \rightarrow \pm 0, n > 2) = g'(y \rightarrow \pm 0, n > 2) = \mp \infty.$$

³³ Beachte $y^{2/n} := \sqrt[n]{y^2} \geq 0$.

Wir illustrieren die Ergebnisse:



Krümmung k und Krümmungsradius ρ von $y = \text{cov}(z, n)$ betragen im Scheitel

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = -n, \quad \rho = \frac{1}{|k|} = \frac{1}{n}.$$

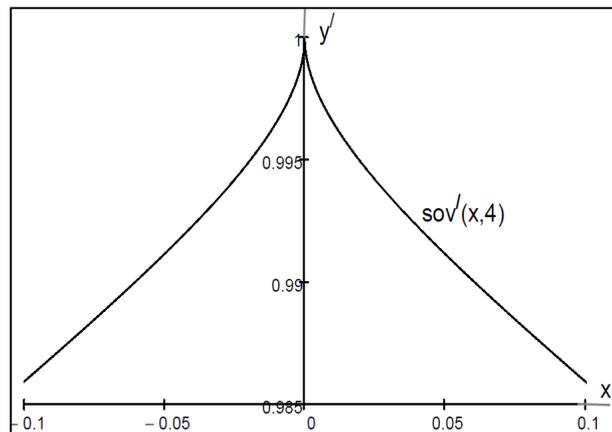
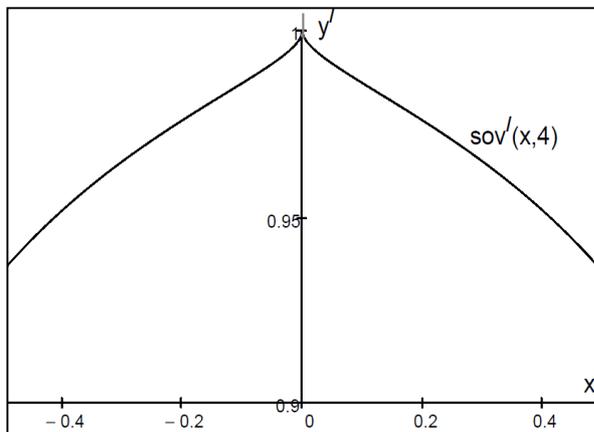
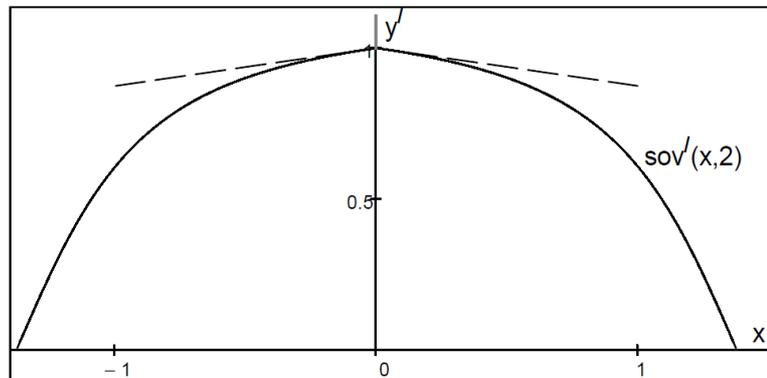
$y = \text{sov}(x, n)$ schneidet die x-Achse im Ursprung unter dem Winkel 45° .

Die Krümmung ist dort nicht definiert. Das ist eine Folge der im Abschnitt 5.1. beschriebenen Singularität im Ursprung der EK(n).

Die drei Grafiken zeigen für $n=2$ und $n=4$ das Verhalten der Ableitung $y' = \text{sov}'(x, n)$ in der Nähe des Ursprungs.

$$\text{sov}''(\pm 0, 2) = \mp 1/8,$$

$$\text{sov}''(\pm 0, n > 2) = \mp \infty.$$



Mit einigem Aufwand³⁴ können an ausgewählten Stellen die Funktionswerte der höheren Ableitungen der Eikurvenfunktionen gewonnen werden. Wir führen dies für $y = \text{cov}(z, n)$ an der Scheitelstelle $z = 0$ durch und ermitteln die ersten Glieder der Taylorentwicklung.

1. Aufstellen der höheren Ableitungen $g^{(k)}(y) = \frac{d^k g(y)}{dy^k}$ für $y(0) = 1$.

³⁴ Mit Unterstützung durch das CAS Mathcad.

$$g'(1) = -n, \quad g''(1) = -4n^2 + n + 2, \quad g'''(1) = \frac{2}{n} \cdot (n-1) \cdot (-12n^3 - 6n^2 + 5n + 2),$$

$$g^{(4)}(1) = \frac{2}{n^2} \cdot (n-1) \cdot (96n^5 + 24n^4 - 98n^3 - 29n^2 + 16n + 4),$$

$$g^{(5)}(1) = \frac{4}{n^3} \cdot (n-1) \cdot (-480n^7 + 750n^5 + 80n^4 - 316n^3 - 61n^2 + 24n + 4).$$

2. Aufstellen der höheren Ableitungen $y^{(k)}(z) = \frac{d^k y(z)}{dz^k}$ für $z = 0$ unter Verwendung der bereits ermittelten Werte, speziell $y^{(2k-1)}(0) = 0$, ($y = \text{cov}(z, n)$ ist eine gerade Funktion).

$$\underline{y(0) = 1}, \quad \underline{y'(0) = 0}, \quad \underline{y''(0) = g'(1) = -n}, \quad \underline{y'''(0) = g''(1) \cdot y'(0) = 0},$$

$$\underline{y^{(4)}(0) = g'''(1) \cdot y'(0)^2 + g''(1) \cdot y''(0) = (-4n^2 + n + 2) \cdot (-n) = 4 \cdot n^3 - n^2 - 2 \cdot n},$$

$$y^{(5)}(z) = g^{(4)}(y) \cdot y'(z)^3 + 3g'''(y) \cdot y'(z) \cdot y''(z) + g''(y) \cdot y'''(z), \quad \underline{y^{(5)}(0) = 0},$$

$$\underline{y^{(6)}(0) = \dots = 3g'''(1) \cdot y''(0)^2 + g''(1) \cdot y^{(4)}(0) = \dots = -88 \cdot n^5 + 44 \cdot n^4 + 81 \cdot n^3 - 22 \cdot n^2 - 16 \cdot n},$$

$$y^{(7)}(z) = g^{(6)}(y) \cdot y'(z)^5 + 10g^{(5)}(y) \cdot y'(z)^3 \cdot y''(z) + \dots + g''(y) \cdot y^{(5)}(z), \quad \underline{y^{(7)}(0) = 0},$$

$$\begin{aligned} \underline{y^{(8)}(0) = \dots} &= 15g^{(4)}(1) \cdot y''(0)^3 + 15g'''(1) \cdot y''(0) \cdot y^{(4)}(0) + g''(1) \cdot y^{(6)}(0) \\ &= \underline{4672 \cdot n^7 - 3504 \cdot n^6 - 5976 \cdot n^5 + 3377 \cdot n^4 + 2364 \cdot n^3 - 660 \cdot n^2 - 272 \cdot n}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Taylorentwicklung an der Stelle $z = 0$:

$$\text{cov}(z, n) = a_0 + a_2 \cdot z^2 + a_4 \cdot z^4 + a_6 \cdot z^6 + a_8 \cdot z^8 + R(z, n); \quad a_{2k}(n) = \frac{y^{(2k)}(0)}{(2k)!}. \quad (138)$$

Diese Form der $a_{2k}(n)$ erlaubt keine einfache Abschätzung des Restgliedes $R(z, n)$ und des Konvergenzradius $r(n)$ der Taylorreihen. Bekannt ist natürlich $r(1) = \infty$.

Beispiele:

$$y = \text{cov}(z, 1) = \cos(z) \rightarrow 1 - \frac{1}{2!} \cdot z^2 + \frac{1}{4!} \cdot z^4 - \frac{1}{6!} \cdot z^6 + \frac{1}{8!} \cdot z^8 - \dots$$

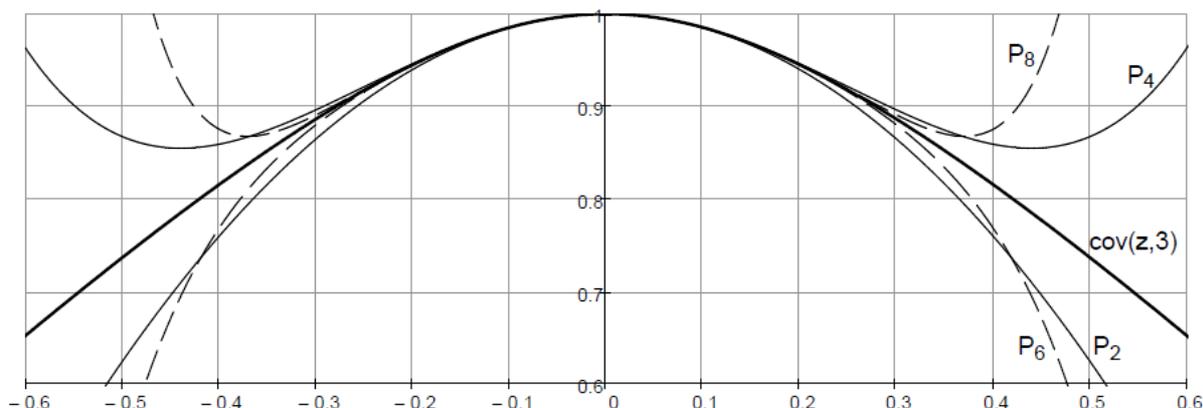
$$y = \text{cov}(z, 2) \rightarrow 1 - z^2 + z^4 - \frac{11}{5} \cdot z^6 + \frac{219}{35} \cdot z^8 - \dots$$

$$y = \text{cov}(z, 3) \rightarrow 1 - \frac{3}{2} \cdot z^2 + \frac{31}{8} \cdot z^4 - \frac{5293}{240} \cdot z^6 + \frac{311509}{1920} \cdot z^8 - \dots$$

$$y = \text{cov}(z, 4) \rightarrow 1 - 2 \cdot z^2 + \frac{29}{3} \cdot z^4 - \frac{926}{9} \cdot z^6 + \frac{89185}{63} \cdot z^8 - \dots$$

$$y = \text{cov}(z, 5) \rightarrow 1 - \frac{5}{2} \cdot z^2 + \frac{155}{8} \cdot z^4 - \frac{5289}{16} \cdot z^6 + \frac{6532517}{896} \cdot z^8 - \dots$$

Die folgende Grafik zeigt die Näherungspolynome $P_{2m}(z,3) := \sum_{k=0}^m a_{2k} \cdot z^{2k}$ für $\text{cov}(z,3)$.



Für einige Näherungspolynome $P_{2m}(z,n) = \sum_{k=0}^m a_{2k}(n)z^{2k}$ sind die relativen Abweichungen

$$\delta_{2m}(z,n) = \frac{\text{cov}(z,n) - P_{2m}(z,n)}{\text{cov}(z,n)} \cdot 100\% \text{ an den Stellen } z = \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2n} \text{ tabelliert.}$$

$n = 2$					$n = 3$				
z	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	z	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8
2/3	26.30	-27.01	38.95	-66.57	1/2	15.19	-17.68	29.09	-56.93
1/2	5.29	-2.60	1.74	-1.35	1/3	3.55	-1.99	1.51	-1.35
1/3	1.12	-0.26	0.08	-0.03	1/4	1.24	-0.41	0.18	-0.09
1/4	0.37	-0.05	0.01	-0.00	1/6	0.27	-0.04	0.01	-0.00

$n = 4$					$n = 5$				
z	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	z	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8
1/3	7.17	-7.07	9.77	-15.97	1/4	4.51	-4.05	5.08	-7.51
1/4	2.65	-1.55	1.24	-1.16	1/5	2.11	-1.26	1.04	-0.99
1/5	1.20	-0.46	0.24	-0.15	1/6	1.11	-0.48	0.28	-0.19
1/8	0.21	-0.03	0.01	-0.00	1/10	0.17	-0.03	0.01	-0.00

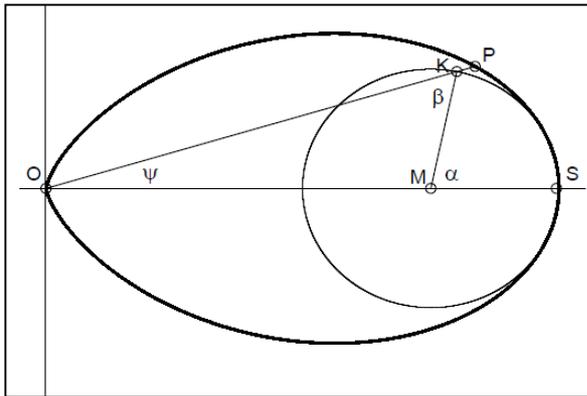
Die Daten legen die Vermutung nahe, dass $\text{cov}(z,n)$ durch die Näherungspolynome $P_8(z,n)$ für $|z| \leq \frac{1}{n+1}$ hinreichend und für $|z| \leq \frac{1}{2n}$ sehr gut approximiert wird.

Für die Ermittlung eines eventuellen Konvergenzradius $r(n)$ müsste nachgewiesen werden, dass $|a_{2k+2}| \leq a^2 \cdot |a_{2k}|$ mit konstantem $a = a(n)$ gilt und folglich für $|z| < \frac{1}{a} = r$ das Quotientenkriterium erfüllt ist: $|a_{2k+2} \cdot z^{2k+2}| : |a_{2k} \cdot z^{2k}| \leq a^2 \cdot z^2 < 1$.

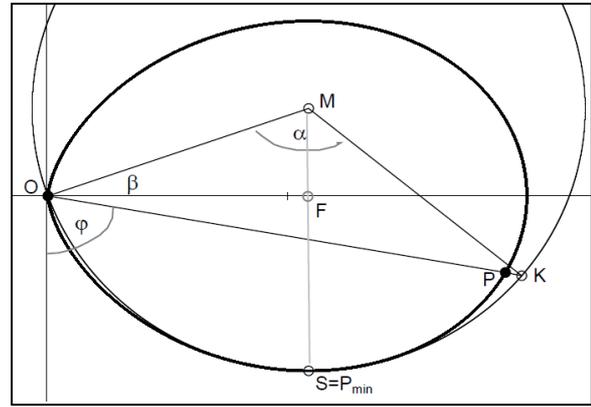
Die Aufstellung der Näherungspolynome möge aber genügen.

8.6. Krümmungskreise der $Ek(n)$ und Näherungskurven der Eikurvenfunktionen

Mit einem (anschaulichen) geometrischen Ansatz ergeben sich einfache Näherungsfunktionen für die Eikurvenfunktionen, indem die in dem Abschnitt 5.4. behandelten Eigenschaften der Scheitelkrümmungskreises der $Ek(n)$ benutzt werden. Den folgenden Abbildungen sind die Bezeichnungen und Beziehungen zu entnehmen.



(a) Krümmungskreis im Hauptscheitel, $Ek(3)$



(b) Krümmungskreis im Nebenscheitel, $Ek(2)$

Scheitel $S : \xi_s = 1, \eta_s = 0$

Krümmungsradius $\rho = \overline{MS} = \overline{MK} = \frac{1}{n+1}$

$\overline{MO} = 1 - \rho = \frac{n}{n+1}$

Ordinate $z = \widehat{SP}$, $y = \overline{OP} = \text{cov}(z, n)$

$s = \overline{OK}$, Kreisbogen $b = \rho \cdot \alpha = \widehat{SK}$

$$\xi_s = \overline{OF} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)/2}, \eta_s = \overline{SF} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \xi_s$$

$$\rho = \overline{MS} = \overline{MK} = \frac{n+1}{2} \eta_s = \frac{\sqrt{n+1}}{2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}$$

$$\overline{MO} = \sqrt{\xi_s^2 + (\rho - \eta_s)^2} = \rho (!)$$

$$x = \widehat{OP}, \quad y = \overline{OP} = \text{sov}(x, n) \quad (139/1)$$

$$s = \overline{OK}, \quad b = \rho \cdot \alpha = \widehat{OK} \quad (139/2)$$

$$\sin \beta : \sin \psi = \overline{MO} : \overline{MK} = n$$

$$\angle KMS = \alpha = \beta + \psi$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = \arcsin(n \cdot \sin \psi) + \psi}$$

$$\overline{OK}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MK}^2 + 2 \cdot \overline{MO} \cdot \overline{MK} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{s^2 = \frac{n^2 + 1 + 2n \cdot \cos[(n+1) \cdot b]}{(n+1)^2}}$$

$$\sin \beta = \overline{MF} : \overline{MO} = (\rho - \eta_s) : \rho = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\angle MOP = \pi/2 - \alpha/2 = \beta + (\pi/2 - \varphi)$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = 2\varphi - 2 \arcsin\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} \quad (140/1)$$

$$\overline{OK}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MK}^2 - 2 \cdot \overline{MO} \cdot \overline{MK} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{s^2 = 2 \cdot \rho^2 \cdot (1 - \cos(b/\rho))} \quad (140/2)$$

Einschränkung: $|\psi| \leq \arcsin \frac{\rho}{\overline{MO}} = \arcsin \frac{1}{n}$

$$\varphi \geq \beta = \arccos \frac{\overline{OF}}{\overline{MO}} = \arccos \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$$

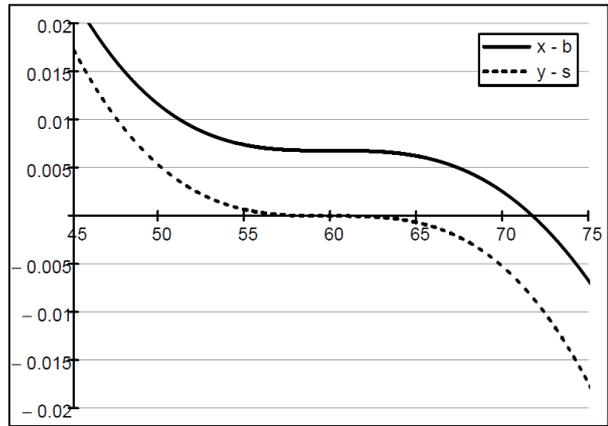
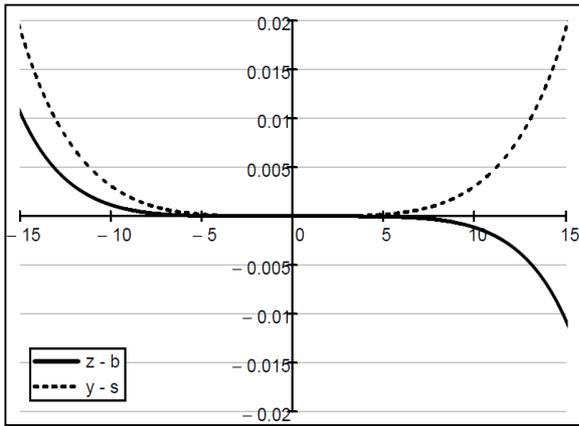
Die Winkeleinschränkung sichert, dass der Strahl OP den Krümmungskreis schneidet.

Zu gegebenem Winkel (ψ bzw. φ) des Ortsvektors der $Ek(n)$ können mittels (139) und (140) für die Krümmungskreise die Bogenlänge b und die Länge s berechnet werden. Mit $y = \cos^n(\psi)$, $z = \arccos(y)$ bzw. $y = \sin^n(\varphi)$, $x = \arcsin(y)$ ergeben sich dann die Differenzen $y - s$, $z - b$ bzw. $x - b$. Damit wird eine Fehlerabschätzung ermöglicht. Diese ist sinnvoll in der Umgebung von $\psi = 0$ bzw. $\varphi_{\max} = \arctan 1/\sqrt{n}$.

In den Grafiken sind für die $Ek(3)$ die Abweichungen über die Winkel (in Grad) aufgetragen.

Hauptscheitelumgebung, $y = \cos(z)$

Nebenscheitelumgebung, $y = \sin(x)$



$$|\psi| \leq 13^\circ, \text{ d.h. } \underline{z \leq 0,237}, \underline{y \geq 0,925}, \\ \Rightarrow |z - b| < |y - s| \leq \underline{0,01}.$$

$$52^\circ \leq \varphi \leq 72^\circ, \text{ d.h. } \underline{0,508 \leq x \leq 0,952}, \\ \Rightarrow |x - b| \leq \underline{0,01}, |y - s| \leq \underline{0,01}.$$

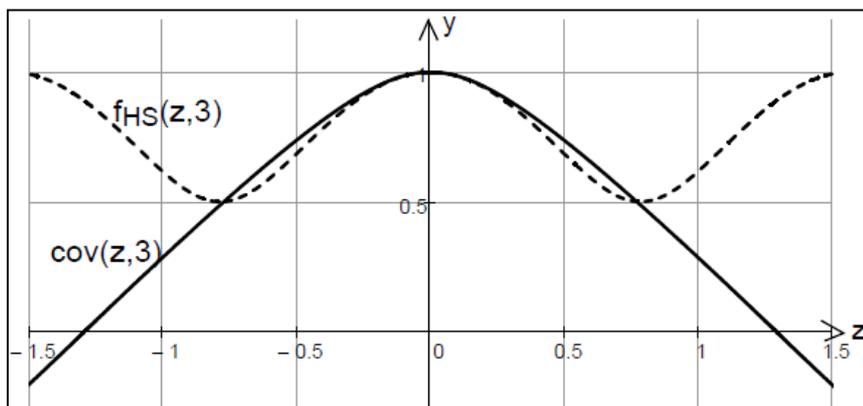
Unter Vernachlässigung der Abweichungen ersetzen wir in (140) den Kreisbogen b durch die Kurvenbögen z bzw. x und die Strecke s durch y .

Die derart definierten Funktionen sind zumindest in Nähe der o. g. Umgebungen eine Annäherung an die betreffenden Eikurvenfunktionen.

1. Annäherung für $y = \cos(z, n)$ im Hauptscheitelbereich:

$$y = f_{HS}(z, n) := \sqrt{\frac{n^2 + 1 + 2n \cdot \cos[(n+1) \cdot z]}{(n+1)^2}} = \sqrt{1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{n+1}{2} \cdot z\right)} \quad (141)$$

Beispiele: $y = f_{HS}(z, 1) = \sqrt{1 - \sin^2(z)} = \cos(z)$, $y = f_{HS}(z, 3) = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2(2z)}$.



Die Taylorentwicklungen von $f_{HS}(z, n)$ und $\text{cov}(z, n)$ stimmen in den ersten zwei Gliedern überein. Wir erhalten³⁵

$$f_{HS}(z, n) = 1 - \frac{n}{2} \cdot z^2 + \frac{n \cdot (n^2 - n + 1)}{24} \cdot z^4 - \frac{n \cdot (n^4 - 11n^3 + 21n^2 - 11n + 1)}{720} \cdot z^6 + - \dots$$

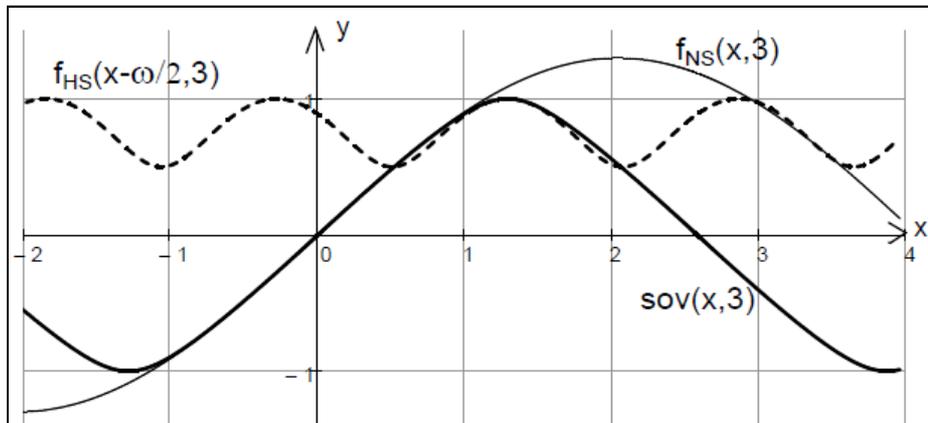
und im Vergleich mit (138) die Abweichungen ab der 4. Potenz von z

$$\text{cov}(z, n) - f_{HS}(z, n) = \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{8} \cdot z^4 - \frac{n \cdot (n^2 - 1) \cdot (29n^2 - 11n - 5)}{240} \cdot z^6 + - \dots$$

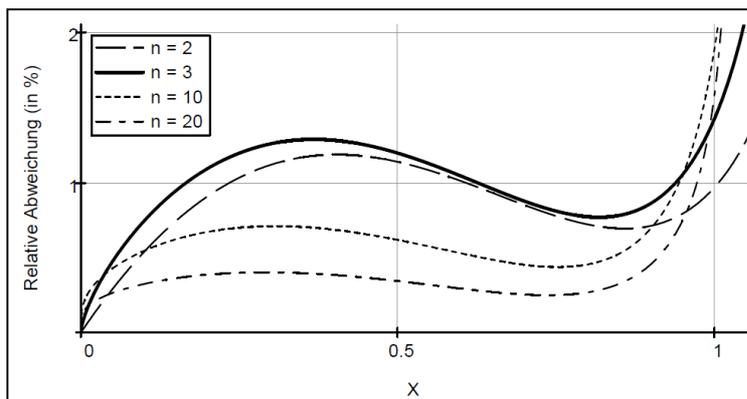
2. Annäherung für $y = \text{sov}(x, n)$ im Nebenscheitelpbereich:

$$y = f_{NS}(x, n) := 2\rho \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(x/\rho)}{2}} = 2\rho \cdot \sin\left(\frac{x}{2\rho}\right), \quad 2\rho = \sqrt{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (142)$$

Beispiele: $y = f_{NS}(x, 1) = \sin(x)$, $y = f_{NS}(x, 3) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{4x}{3\sqrt{3}}\right)$



$f_{NS}(x, n)$ approximiert (über den Nebenscheitelpbereich hinaus!) $\text{sov}(x, n)$ im Intervall $|x| < 1$ überraschend gut, wie die folgende Grafik zeigt.



Relative Abweichung

$$\Delta(x, n) := \frac{f_{NS}(x, n) - \text{sov}(x, n)}{\text{sov}(x, n)}$$

n	$\Delta(0,4/n)$	$\Delta(1/n)$
2	1,18%	0,97%
3	1,28%	1,44%
10	0,68%	1,93%
20	0,38%	1,64%

Ähnlich (zu erwarten) gut approximiert $f_{HS}(x - \omega/2, n)$ die Funktion $\text{sov}(x, n)$ im Intervall $\omega(n)/2 - \delta < x < \omega(n)/2 + \delta$ mit $\delta = \omega(n)/2 - 1$.

³⁵ Ohne Schwierigkeit mittels Mathcad oder ähnlicher Software.

8.7. Bemerkungen zu einheitlichen Additionsformeln für die Bogenintegrale $\text{arcsov}(y,n)$

In Ergänzung zu den speziellen Untersuchungen in den Abschnitten 8.2. - 8.4. , insbesondere zu den Additionsformeln der Bogenintegrale, versuchen wir abschließend einen gemeinsamen Aspekt für die Aufstellung derartiger Additionsformeln herauszuarbeiten.

Dazu ersetzen wir die Parameterdarstellung (111) mit dem Parameter φ durch eine direkte Integralbeziehung zwischen der Bogenlänge x und dem Radiusvektor y , wobei wir den Wertebereich auf $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ einschränken, so dass eine eindeutige Beziehung zwischen y und φ vorliegt.

In (118a) substituieren wir $t = \sin(\varphi)$ und erhalten

$$I_n(k,t) = \int_0^t \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot t^2}} dt, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad t = \sin \varphi = y^{1/n}. \quad (143a)$$

Die Rekursionsformel (118b) lautet dann

$$(n+3) \cdot k^2 \cdot I_{n+4}(k,t) - (n+2) \cdot (1+k^2) \cdot I_{n+2}(k,t) + (n+1) \cdot I_n(k,t) = R_n(k,t) \quad (143b)$$

$$R_n(k,t) = t^{n+1} \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot t^2}$$

Auf Grund der Herleitung der Formel (32) in 4.1. gilt (143b) auch für $n = -1$.

Die gewünschte Integralbeziehung für $\text{arcsov}(y,n)$ folgt aus (118c)

$$x(y,n) = n \cdot \left\{ I_{n-1}(k, y^{1/n}) - k^2 \cdot I_{n+1}(k, y^{1/n}) \right\}, \quad k^2 = k^2(n) = 1 - 1/n^2. \quad (143c)$$

Wir setzen nun für $I_n(t) = I_n(k,t)$ (mit festem k) folgende Additionsformel an

$$I_n(t_1) + I_n(t_2) - I_n(t_3) = K_n, \quad t_3 := \frac{t_1 \cdot w(t_2) + t_2 \cdot w(t_1)}{1 - k^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2}, \quad w(t) := \sqrt{1-t^2} \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot t^2} \quad (144)$$

und werden nachfolgend die Korrekturglieder $K_n = K_n(k, t_1, t_2)$ näher bestimmen.

Wird die Additionsformel (144) in (143b) eingesetzt, so entsteht eine Rekursionsformel für die K_n :

$$(n+3) \cdot k^2 \cdot K_{n+4} - (n+2) \cdot (1+k^2) \cdot K_{n+2} + (n+1) \cdot K_n = R_n(t_1) + R_n(t_2) - R_n(t_3). \quad (145)$$

Es genügt also, die Korrekturglieder nur für $n = 0, 1, 2$ gesondert zu ermitteln.

Zusammenfassend erhalten wir aus (143c) die Additionsformel für $x(y,n) = \text{arcsov}(y,n)$

$$\underline{\text{arcsov}(y_1,n) + \text{arcsov}(y_2,n) - \text{arcsov}(y_3,n) = n \cdot (K_{n-1} - k^2 \cdot K_{n+1})} \quad (146)$$

mit $k^2 = 1 - \frac{1}{n^2}$, $t_i = y_i^{1/n}$ und den Abkürzungen aus (144).

Unter Beachtung des Wertebereichs von φ sind y_1, y_2 hinreichend klein zu wählen.

Die Korrekturglieder K_0, K_2 entnehmen wir als Spezialfälle aus dem von L. EULER aufgestellten Additionstheorem für elliptische Integrale.³⁶ Eine eingängige Herleitung für K_0 (im Sinne der EULERSchen Methode) findet man auch bei LAWRENTJEW/SCHABAT³⁷, dort im Bezug auf das Additionstheorem der elliptischen Funktionen.

Euler hat (in E581) folgende Differentialgleichung entwickelt, die mit dem t_3 aus (144) erfüllt wird:

$$\frac{g(t_1^2)}{w(t_1)} dt_1 + \frac{g(t_2^2)}{w(t_2)} dt_2 - \frac{g(t_3^2)}{w(t_3)} dt_3 = U du, \quad U = U(t_1, t_2) = -t_3 \cdot \frac{g(t_1^2) - g(t_2^2)}{t_1^2 - t_2^2}, \quad u = t_1 \cdot t_2, \quad (147)$$

$g(z)$ ist eine beliebige ganzrationale Funktion von z .

Wir setzen speziell $g(z) = a + b \cdot z$, erhalten damit $U = -t_3 \cdot b$, integrieren (147) mit dem Ergebnis $a \cdot (I_0(t_1) + I_0(t_2) - I_0(t_3)) + b \cdot (I_2(t_1) + I_2(t_2) - I_2(t_3)) = -t_3 \cdot b \cdot u$ oder nach (144) $a \cdot K_0 + b \cdot K_2 = -b \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$. Für $a = 1, b = 0$ bzw. $a = 0, b = 1$ folgt

$$\underline{K_0 = 0, \quad K_2 = -t_1 \cdot t_2 \cdot t_3.} \quad (148a)$$

Das Korrekturglied K_1 ermitteln wir durch (elementare) Integration von $I_1(t)$.

Es gilt $I_1(t) = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \ln \left(\frac{1 + k^2 - 2 \cdot k^2 \cdot t^2 - 2 \cdot k \cdot w(t)}{(1 - k)^2} \right)$ mit $I_1(0) = 0$. Mittels (144) folgt

$$\underline{K_1 = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \ln \left(\frac{Z(t_1) \cdot Z(t_2)}{(1 - k)^2 \cdot Z(t_3)} \right)}, \quad Z(t) = 1 + k^2 - 2 \cdot k^2 \cdot t^2 - 2 \cdot k \cdot w(t). \quad (148b)$$

Mit der Rekursionsformel (145) bestimmen wir noch die folgenden Korrekturglieder K_3, K_4 .

$$n = -1. \quad R_{-1}(t) = w(t). \quad 2 \cdot k^2 \cdot K_3 = (1 + k^2) \cdot K_1 + w(t_1) + w(t_2) - w(t_3) - 1 \quad (!).$$

(!) Die Korrektur -1 ist notwendig, denn für $t_1 = 0$ folgt aus (144) $t_2 = t_3$, d.h. $K_3 = 0$.

$$\underline{K_3 = \frac{1}{2 \cdot k} \cdot [(1 + k^2) \cdot K_1 + w(t_1) + w(t_2) - w(t_3) - 1]} \quad (148c)$$

$$n = 0. \quad R_0(t) = t \cdot w(t). \quad 3 \cdot k^2 \cdot K_4 = 2 \cdot (1 + k^2) \cdot K_2 - K_0 + t_1 \cdot w(t_1) + t_2 \cdot w(t_2) - t_3 \cdot w(t_3).$$

$$\underline{K_4 = \frac{1}{3 \cdot k^2} \cdot [-2 \cdot (1 + k^2) \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 + t_1 \cdot w(t_1) + t_2 \cdot w(t_2) - t_3 \cdot w(t_3)]} \quad (148d)$$

Wir erkennen aus (145) und (146), dass t_3 und die Korrekturglieder in den Additionsformeln des arcsov(y, n) algebraische Ausdrücke der t_1 und t_2 sind und ggf. Logarithmen derartiger Ausdrücke enthalten. (Der Logarithmus tritt hier nur für gerade n auf.)

Der Satz geht auf EULER zurück. Eine bedeutende Verallgemeinerung stammt von ABEL.

³⁶ L. EULER: Opera Omnia: Serie 1, Vol. 20 pp 58-79, Vol. 21 pp.39-56.

Als pdf-Dateien abrufbar unter <http://eulerarchive.maa.org/index.html>: E251, E581 (auch dt.)

³⁷ Lawrentjew/Schabat: Methoden der komplexen Funktionentheorie. Berlin, 1967, §4,102

9. Ergänzungen zu 5.5. : Die $Ek(n)$ als Billardbande

Im Abschnitt 5.5. haben wir uns begnügt, Spezialfälle von Reflexionswegen in einer $Ek(n)$ zu analysieren.

Dabei haben wir die allgemeinere Suche nach Reflexionswegen als lohnenswert angesehen, speziell die Suche nach geschlossenen und perfekten Reflexionspolygonen, (Seite 33,37).

Dies soll nachfolgend zumindest ansatzweise ergänzt werden.

Wenn nicht Gegenteiliges erwähnt wird, so ist der Maßstabfaktor der $Ek(n)$ $\lambda = 1$.

9.1. Die Berechnung von Reflexionswegen in der $Ek(n)$

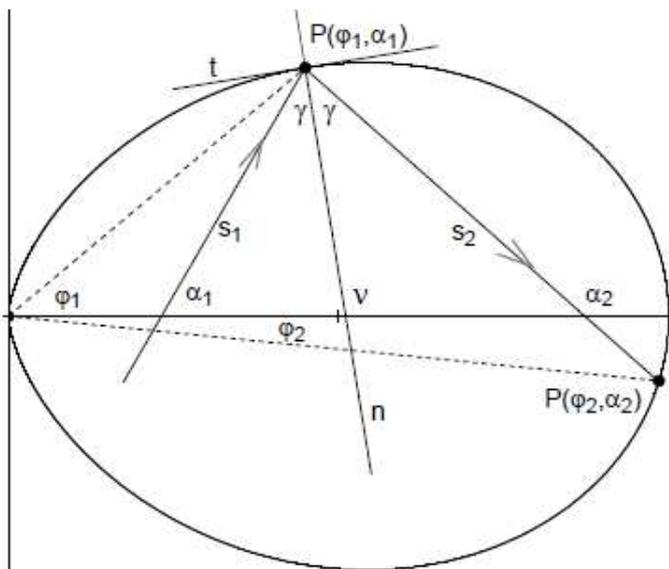
An den Anfang der Untersuchungen stellen wir ein Programm zu Berechnung der Eckpunkte eines Reflexionswegs in der $Ek(n)$, einschließlich der Realisierung mit MATHCAD14.

$$Ek(n): r(\varphi) = \cos^n(\varphi), \quad y(x)^2 = x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2.$$

Unterprogramm Reflexionspunkt $P(\varphi, \alpha)$.

Werden für einen Kurvenpunkt P_1 der Winkel φ_1 des Ortsvektors und der Richtungswinkel α_1 des einfallenden Strahls s_1 vorgegeben, so berechnet $P(\varphi, \alpha)$ den Richtungswinkel α_2 des reflektierten Strahls s_2 sowie für den Schnittpunkt P_2 des Strahls mit der $Ek(n)$ den Winkel φ_2 des Ortsvektors. Natürlich ist α_2 Richtungswinkel des in P_2 einfallenden Strahls s_2 .

Die Wertebereiche seien: $0 \leq \alpha, \nu < \pi, -\pi/2 < \varphi < \pi/2$.



- (1) Gegeben: n, φ_1, α_1
- (2) $x_1 = \cos^{n+1} \varphi_1, y_1 = \cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1$
- (3) $\nu = \arctan \frac{(n+1) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1 - n \cdot \sin^2 \varphi_1}$
- (4) $\alpha_2 = 2 \cdot \nu - \alpha_1$
- (5) $s_2(x) = y_1 + \tan \alpha_2 \cdot (x - x_1)$
- (6) x_2 Lösung von $y(x)^2 = s_2(x)^2$
- (7) $y_2 = s_2(x_2)$
- (8) $\varphi_2 = \arctan(y_2/x_2)$
- (9) Ausgabe: $\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

Anmerkungen:

- (3) Richtungswinkel ν der Normalen n nach Formel (59).
- (4) $\gamma = \alpha_2 - \nu = \nu - \alpha_1$.
- (5) Geradengleichung von s_2 .
- (6) Das Ergebnis für das angenommene Intervall $[0,1]$ ist der Lösungsvektor (x_1, x_2) .
MATHCAD verwendet die symbolischen Schlüsselwörter *auflösen* und *annehmen*.
Wenn kein verwertbares symbolisches Ergebnis möglich ist, wird eine numerische Lösung angegeben. Das erfolgt auch dann, wenn Dezimalzahlen verwendet werden.

Programm: Reflexionspunkt

Anfangsindex von Feldern: ORIGIN = 0

φ ist der Winkel des Ortsvektors des Punktes P ν ist der Richtungswinkel der Normalen

α ist der Richtungswinkel des einfallenden Strahls $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \alpha, \nu < \pi$

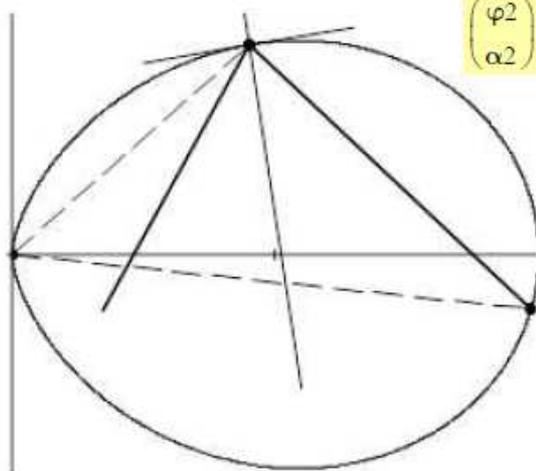
Gegeben: **Eikurve EK(n)** $n := 2$ $x(\varphi) := \cos(\varphi)^{n+1}$ $y(\varphi) := \cos(\varphi)^n \cdot \sin(\varphi)$

Punkt P(φ_1) auf der Ek(n): $\varphi_1 := 40 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\alpha_1 := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$

```

P( $\varphi, \alpha$ ) :=
x1  $\leftarrow$  cos( $\varphi$ )n+1
y1  $\leftarrow$  cos( $\varphi$ )n · sin( $\varphi$ )
N  $\leftarrow$  cos( $\varphi$ )2 - n · sin( $\varphi$ )2
 $\nu \leftarrow$  0.5 ·  $\pi$  if N = 0
 $\nu \leftarrow$  atan[  $\frac{(n+1) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{N}$  ] otherwise
 $\nu \leftarrow \nu + \pi \cdot 1.0$  if  $\nu < 0$ 
 $\alpha_2 \leftarrow 2 \cdot \nu - \alpha$ 
 $\frac{2 \cdot n}{X \leftarrow z^{n+1} - z^2 = [y_1 + \tan(\alpha_2) \cdot (z - x_1)]^2$  | auflösen, z
| annehmen, z  $\geq 0 \wedge z \leq 1 \rightarrow$ 
x2  $\leftarrow X_1$  if  $|X_0 - x_1| < |X_1 - x_1|$ 
x2  $\leftarrow X_0$  otherwise
y2  $\leftarrow y_1 + \tan(\alpha_2) \cdot (x_2 - x_1)$ 
 $\varphi_2 \leftarrow$  atan( $\frac{y_2}{x_2}$ )
( $\varphi_2$ )
( $\alpha_2$ )
    
```

Ausgabe: Punkt P(φ_2) auf der Ek(n) = Schnittpunkt mit dem in P(φ_1) reflektierten Strahl



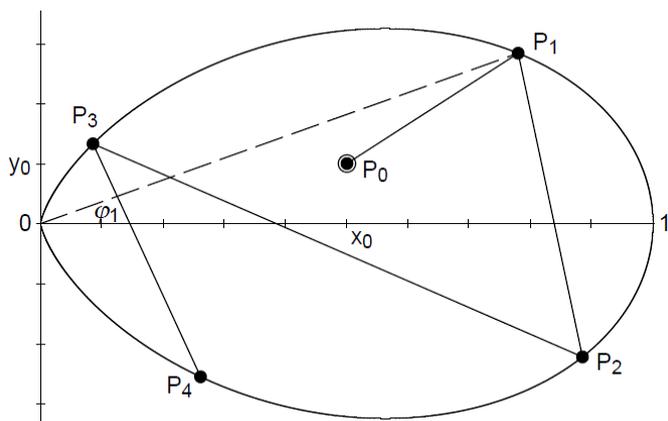
$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} := P(\varphi_1, \alpha_1) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.099268703571378277466 \\ 2.4158940696623248244 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{°}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.69 \\ 138.42 \end{pmatrix} \cdot \text{°}$$

Hauptprogramm Reflexionsweg $W(x_0, y_0, \varphi_1, k)$.

Gegeben sind der Startpunkt $P_0(x_0, y_0)$ auf oder innerhalb der $Ek(n)$ und der Zielpunkt $P_1(\varphi_1)$ auf der $Ek(n)$. Berechnet wird der Reflexionsweg $\overline{P_0 P_1 \dots P_k}$. Ausgegeben wird die Matrix W der Eckpunktkoordinaten des Reflexionswegs.



- (1) Gegeben: $n, x_0, y_0, \varphi_1, k$
- (2) $x_1 = \cos^{n+1} \varphi_1, y_1 = \cos^n \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1$
- (3) $\alpha_1 = \arctan \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
- (4) für $i = 2, \dots, k$:

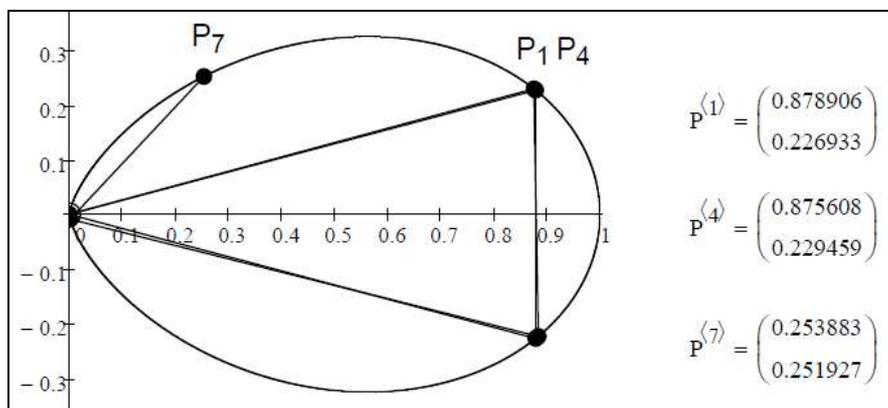
$$\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} = P(\varphi_{i-1}, \alpha_{i-1})$$

$$x_i = \cos^{n+1} \varphi_i, y_i = \cos^n \varphi_i \cdot \sin \varphi_i$$
- (5) Ausgabe $W = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ \dots & \dots \\ x_k & y_k \end{bmatrix}$

Anmerkungen:

- (1) Die Lage von P_0 außerhalb der Kurve wird ausgeschlossen.
- (3) Die Speziallage $x_1 = x_0$ wird im Programm beachtet.
- (5) Statt W kann auch der Vektor φ der Winkel der Ortsvektoren der Eckpunkte bzw. der Vektor α der Richtungswinkel ausgegeben werden.
- (4) Obwohl das Unterprogramm $P(\varphi, \alpha)$ genaue Näherungswerte liefert, wird ein längerer Reflexionsweg in ungünstigen Fällen erheblich vom exakten Weg abweichen.

Beispiel: Das perfekte Reflexionsdreieck in der $Ek(3)$ auf Seite 34 mit $P_0(0,0)$ und $P_1(\varphi_1)$, $\varphi_1 = \arcsin(1/4)$ wurde mit $\varphi_1 = \arcsin(0,250000001)$ gestartet und zerfließt schon nach zwei Durchläufen!



Programm: Reflexionsweg

Anfangsindex von Feldern: ORIGIN = 0.0000

Gegeben: **Eikurve EK(n)** $n := 3$ $x(\varphi) := \cos(\varphi)^{n+1}$ $y(\varphi) := \cos(\varphi)^n \cdot \sin(\varphi)$

Bereitgestellt ist das Programm **Reflexionspunkt P(φ,α)**



```

W(x0,y0,φ1,k) :=
  W0,0 ← x0, W0,1 ← y0
  x1 ← cos(φ1)n+1
  y1 ← cos(φ1)n·sin(φ1)
  W1,0 ← x1, W1,1 ← y1
  α1 ←  $\frac{\pi}{2}$  if x0 = x1
  α1 ← atan( $\frac{y1 - y0}{x1 - x0}$ ) otherwise
  φ1 ← φ1
  for i ∈ 2..k
     $\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} \leftarrow P(\varphi_{i-1}, \alpha_{i-1})$ 
    Wi,0 ← cos(φi)n+1
    Wi,1 ← cos(φi)n·sin(φi)
  W
  
```

Gegeben:

Startpunkt

$x0 := 0.5$ $y0 := 0.1$

Zielpunkt

$\varphi1 := 20 \cdot \frac{\pi}{180}$

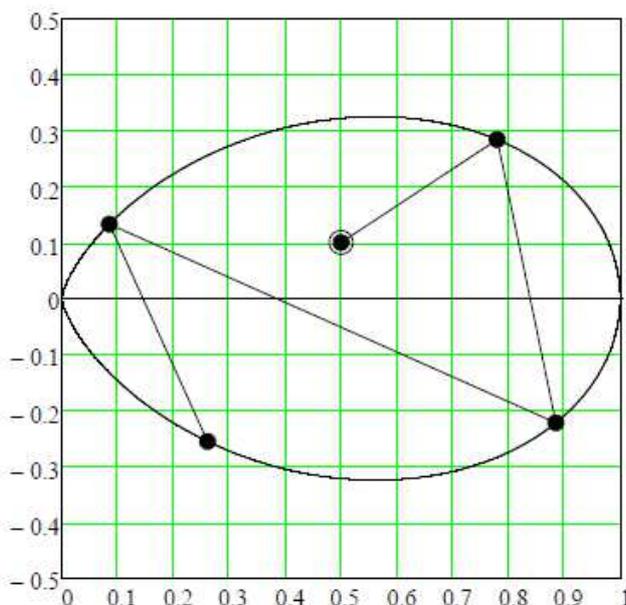
Anzahl der Reflexionspunkte

$k := 4$

$W := W(x0, y0, \varphi1, k) \rightarrow$

0.77972824
0.88476039
0.085290632
0.261034999

Fortsetzung S.2



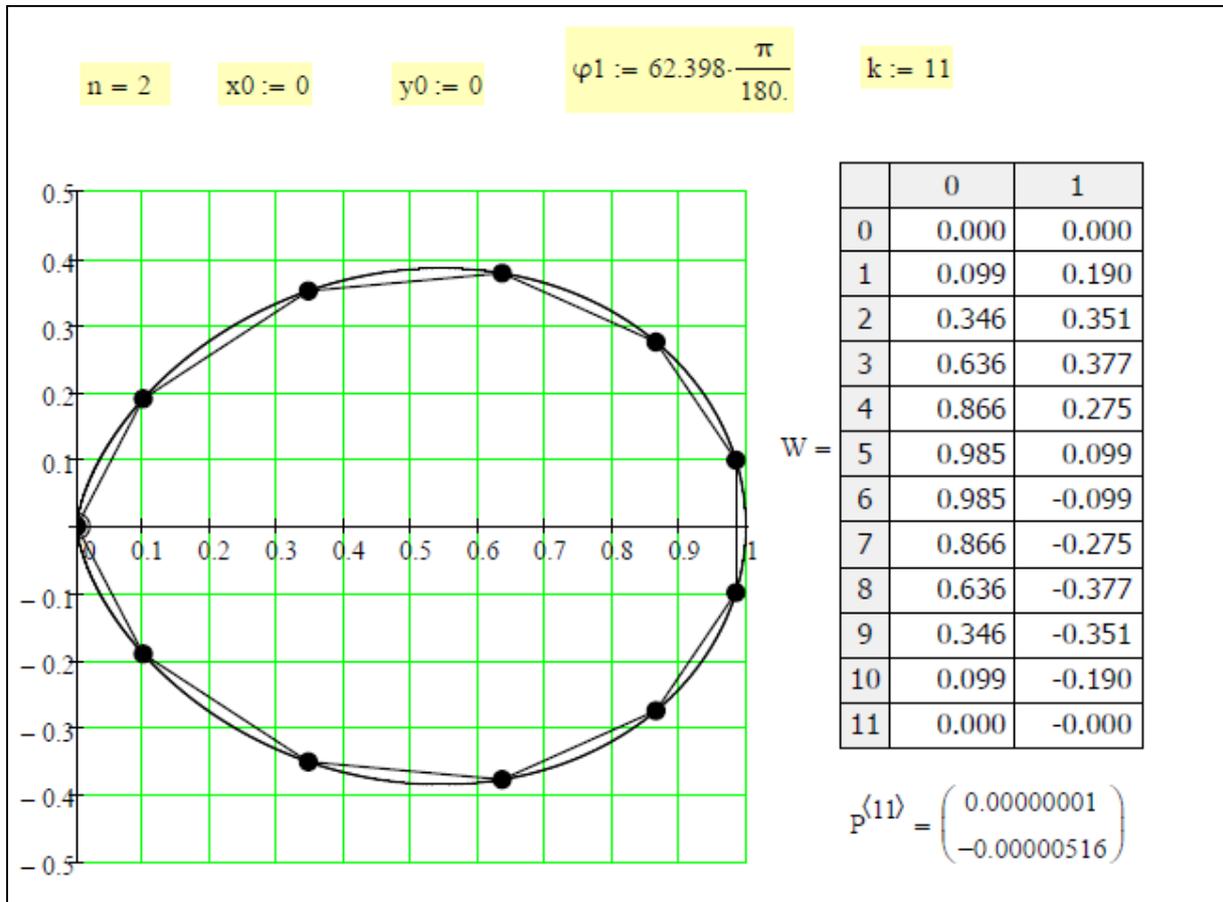
$$W = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.1000 \\ 0.7797 & 0.2838 \\ 0.8848 & -0.2223 \\ 0.0853 & 0.1328 \\ 0.2610 & -0.2554 \end{pmatrix}$$

$$P := W^T$$

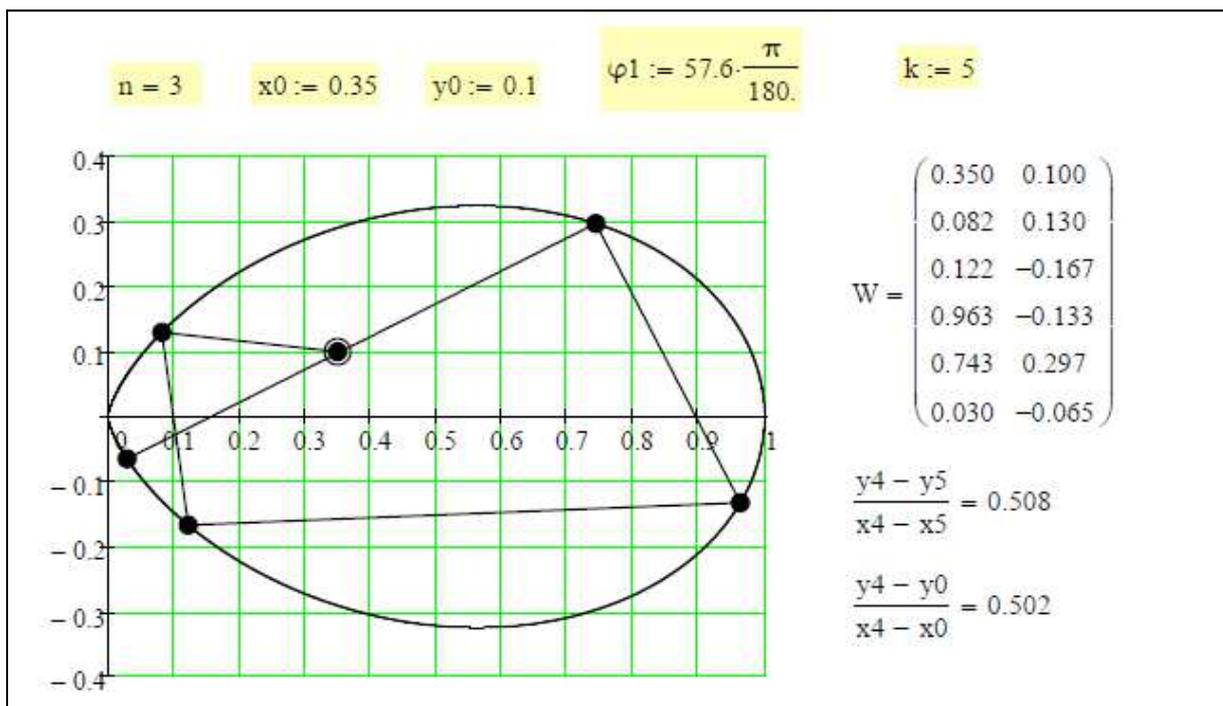
$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.0853 \\ 0.1328 \end{pmatrix}$$

Nachfolgend zwei mit dem Programm erzeugte Wege:

Weg (1): Der Weg ist nur annähern perfekt!

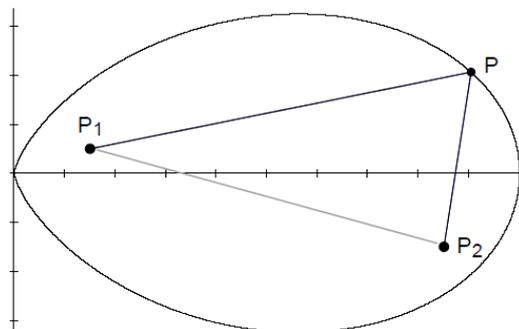


Weg (2): Nach vier Bandenberührungen führt der Weg nahezu(!) über P_0 weiter.



9.2. Extremaleigenschaft des Reflexionspunktes

Wir stellen uns die Aufgabe, einen Punkt P auf der $Ek(n)$ zu ermitteln, für den die Summe der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten P_1, P_2 einen Extremwert annimmt.



$$s = \overline{P_1P} + \overline{P_2P} \Rightarrow \text{extr.} \quad (149)$$

Die Punkte P_1, P_2 liegen innerhalb bzw. auf der Kurve.

Diese Aufgabe wurde für beliebige glatte Kurven von BOLTJANSKI und JAGLOM ausführlich behandelt.³⁸ Sie erhalten folgende Aussage:

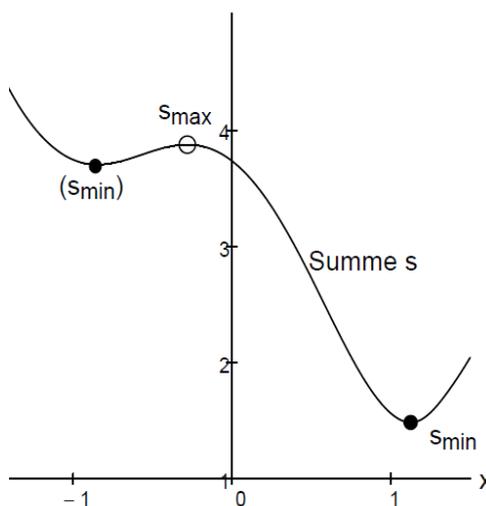
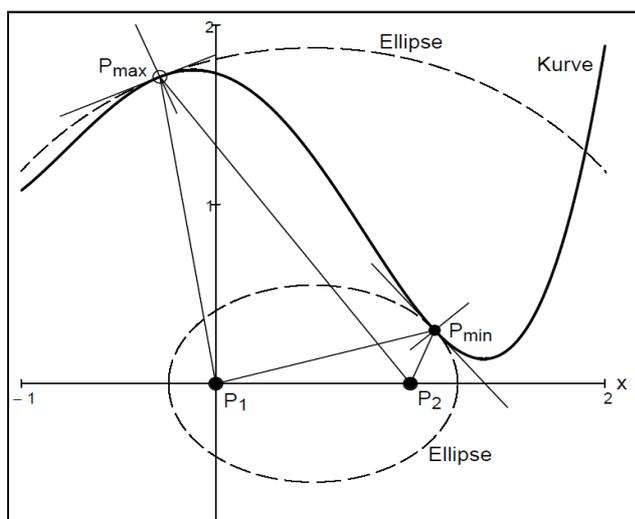
$$\left| \begin{array}{l} \text{Nimmt die Summe } s = \overline{P_1P} + \overline{P_2P} \text{ ein (lokales) Extremum an,} \\ \text{so halbiert die Normale in } P \text{ den Winkel } \angle P_1 P P_2. \end{array} \right| \quad (150)$$

Die Gleichung in (150) beschreibt für verschiedene s konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten P_1 und P_2 und der Hauptachse s .

Berührt eine dieser Ellipsen die vorgegebene glatte Kurve, so ist nach der dort gegebenen Argumentation s extremal. In diesem Falle haben Ellipse und Kurve die gleiche Tangente bzw. Normale. In Ellipsen teilt aber bekanntlich die Normale in P den Winkel der Brennpunktstrahlen, d.h. es gilt (150).

Ist speziell die Kurve eine Gerade, so folgt aus (150) das FERMATSche Prinzip der Optik.

Wir illustrieren die Argumentation an einem Beispiel.



Offensichtlich können die Längen der Reflexionswege (lokale) Minima oder Maxima sein.

³⁸ Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 5. Berlin 1971. Kapitel Geometrische Extremwertaufgaben

Die Autoren erläutern weiterhin das Prinzip der LAGRANGESchen Multiplikatoren, mit dem ein analytischer Beweis von (150) möglich ist. Dies wollen wir anschließend speziell auf die $Ek(n)$ anwenden.

Vorab sei noch auf kürzlich erschienenenes Lehrbuch von S. TABACHNIKOV hingewiesen, das in lockerer aber gehaltvoller Form eine Vielzahl z.T. tiefliegende Beziehungen zwischen Mathematik, Geometrie, Mechanik und Billard aufzeigt.³⁹ Fast am Anfang wird auch (150) behandelt und geometrisch verallgemeinert.

Nun zur Methode von LAGRANGE, angewendet auf die $Ek(n)$.

Nimmt die Funktion $s(x, y) = \left| \overrightarrow{P_1P} \right| + \left| \overrightarrow{P_2P} \right| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$ mit der Nebenbedingung $g(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^{n+1} - x^{2n} = 0$ ein Extremum an, dann existiert ein Multiplikator μ , so dass die beiden partiellen Ableitungen von $F(x, y) = s(x, y) - \mu \cdot g(x, y)$ verschwinden.

Wir bilden

$$F_x(x, y) = \frac{x-x_1}{\left| \overrightarrow{P_1P} \right|} + \frac{x-x_2}{\left| \overrightarrow{P_2P} \right|} - \mu \cdot \left[(n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2x - 2n \cdot x^{2n-1} \right] = 0,$$

$$F_y(x, y) = \frac{y-y_1}{\left| \overrightarrow{P_1P} \right|} + \frac{y-y_2}{\left| \overrightarrow{P_2P} \right|} - \mu \cdot \left[(n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2y \right] = 0$$

und fassen diese Gleichungen zu einer Vektorgleichung zusammen:

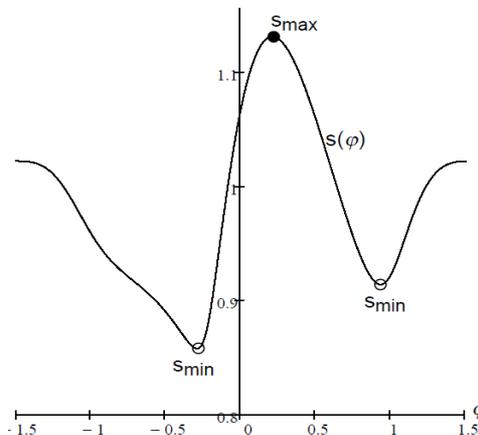
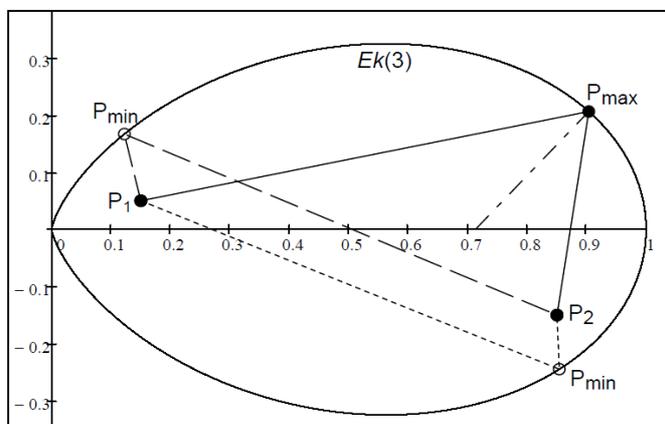
$$\frac{1}{\left| \overrightarrow{P_1P} \right|} \cdot \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\left| \overrightarrow{P_2P} \right|} \cdot \begin{pmatrix} x-x_2 \\ y-y_2 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} (n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2x - 2n \cdot x^{2n-1} \\ (n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2y \end{pmatrix}.$$

Links stehen die Einheitsvektoren in Richtung $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_2P}$ und rechts ihre Summe. Diese weist in Richtung der Winkelhalbierenden. Wir bestimmen deren Richtungswinkel ω und ersetzen x und y durch die Ausdrücke in φ (siehe Seite 1)

$$\tan(\omega) = \frac{(n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2y}{(n+1) \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot 2x - 2n \cdot x^{2n-1}} = \dots = \frac{(n+1) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\cos^2\varphi - n \cdot \sin^2\varphi} = \tan(\nu) \quad ! \text{ [Formel (59)].}$$

D.h. die Winkelhalbierende fällt mit der Normalen in P zusammen.

Beispiel: Es existieren drei Reflexionspunkte.



³⁹ SERGE TABACHNIKOV: Geometrie und Billard. Berlin, Heidelberg 2013

9.3. Berechnung von Reflexionspunkten mit dem Extremalprinzip

Gegeben seien die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Gesucht wird der Winkel φ des Reflexionspunktes $P(x(\varphi), y(\varphi))$ mit $x(\varphi) = \cos^{n+1}(\varphi)$ und $y(\varphi) = \cos^n(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$.

Wir bilden für $s(\varphi) = \sqrt{(x(\varphi) - x_1)^2 + (y(\varphi) - y_1)^2} + \sqrt{(x(\varphi) - x_2)^2 + (y(\varphi) - y_2)^2} = s_1(\varphi) + s_2(\varphi)$ die Ableitung $s'(\varphi) = s_1'(\varphi) + s_2'(\varphi)$ und erhalten die Bestimmungsgleichung $s'(\varphi) = 0$.

Es gilt

$$s_i'(\varphi) = \frac{\cos^{n-1} \varphi}{s_i(\varphi)} \cdot \left[-(n+1) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (\cos^{n+1} \varphi - x_i) + (-n \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cdot (\cos^n \varphi \cdot \sin \varphi - y_i) \right]$$

und umgeordnet, vereinfacht und mit den Abkürzungen (63a) aus Seite 21

$$s_i'(\varphi) = \frac{\cos^{n-1} \varphi}{s_i(\varphi)} \cdot [-n \cdot y(\varphi) + \mathbf{s}(\varphi) \cdot x_i + \mathbf{c}(\varphi) \cdot y_i], \quad s_1'(\varphi) + s_2'(\varphi) = 0, \quad (151)$$

$$\mathbf{s}(\varphi) = (n+1) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi), \quad \mathbf{c}(\varphi) = n \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi).$$

Setzen wir $\varphi \neq \pi/2$ und $s_i(\varphi) \neq 0$ (d.h. $P \neq P_i$) voraus, so erhalten wir die Gleichung für φ

$$0 = n \cdot y(\varphi) \cdot (s_1(\varphi) + s_2(\varphi)) - \mathbf{s}(\varphi) \cdot (x_1 \cdot s_2(\varphi) + x_2 \cdot s_1(\varphi)) - \mathbf{c}(\varphi) \cdot (y_1 \cdot s_2(\varphi) + y_2 \cdot s_1(\varphi)). \quad (152)$$

Diese Gleichung ist in der Regel nur numerisch zu lösen.⁴⁰

Wir wenden die Gleichung (152) mit der Mathcad-Routine auf das *Beispiel* am Ende von **9.2.** an.

Gegeben: $n = 3$ $x_1 = 0.15$ $y_1 = 0.05$ $x_2 = 0.86$ $y_2 = -0.15$.

Näherung: Numerische Lösung:

$\varphi_0 = 20^\circ$	$\varphi_{\max} = 12,954^\circ$	$x_{\max} = 0.902$	$y_{\max} = 0.207$	$s_{\max} = 1.128$
$\varphi_0 = 60^\circ$	$\varphi_{\min} = 53,727^\circ$	$x_{\min} = 0.123$	$y_{\min} = 0.167$	$s_{\min} = 0.923$
$\varphi_0 = -20^\circ$	$\varphi_{\min} = -15,482^\circ$	$x_{\min} = 0.863$	$y_{\min} = -0.239$	$s_{\min} = 0.858$.

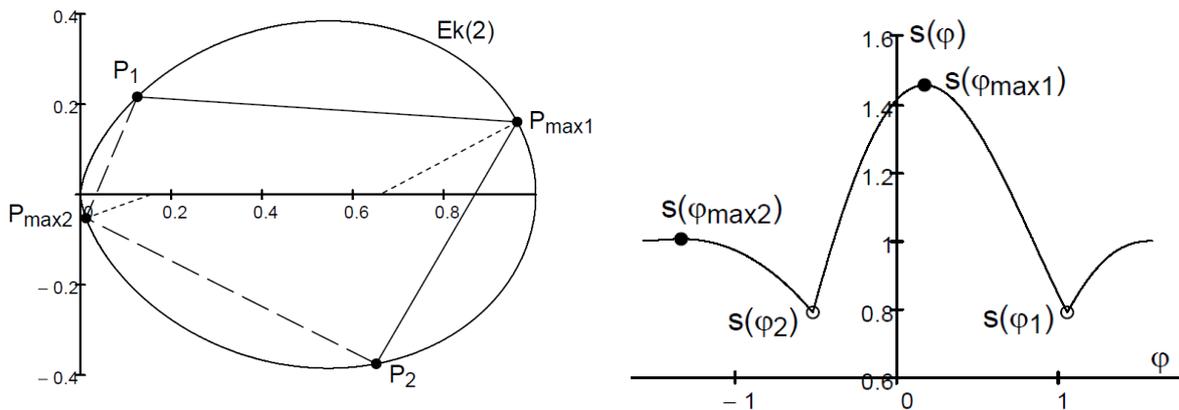
In einem zweiten Beispiel liegen die Punkte $P_1(\varphi_1)$, $P_2(\varphi_2)$ auf der Eikurve $Ek(2)$.

Gegeben: $n = 2$ $\varphi_1 = 60^\circ$ $x_1 = 1/8 = 0.125$ $y_1 = \sqrt{3}/8 \approx 0.271$
 $\varphi_2 = -30^\circ$ $x_2 = 3\sqrt{3}/8 \approx 0.650$ $y_2 = -3/8 = -0.375$.

Näherung: Numerische Lösung:

$\varphi_0 = 20^\circ$	$\varphi_{\max 1} = 9.530^\circ$	$x_{\max 1} = 0.959$	$y_{\max 1} = 0.161$	$s_{\max 1} = 1.455$
$\varphi_0 = -60^\circ$	$\varphi_{\max 2} = -76,585^\circ$	$x_{\max 2} = 0.012$	$y_{\max 2} = -0.052$	$s_{\max 2} = 1.006$
$\varphi_0 = 50^\circ$	$\varphi = 60^\circ$	entfällt: $P = P_1$		
$\varphi_0 = -20^\circ$	$\varphi = -30^\circ$	entfällt: $P = P_2$.		

⁴⁰ Etwa mit der Mathcad-Routine „Suchen“ unter Vorgabe eines Näherungswertes.



Der Richtungswinkel ν der Winkelhalbierenden = Normalen folgt nach (59) und (63a) aus

$$\tan(\nu) = -\frac{c(\varphi)}{s(\varphi)}.$$

Wir erhalten in dem Beispiel $\nu_{\max 1} = \arctan\left(-\frac{c(\varphi_{\max 1})}{s(\varphi_{\max 1})}\right) = \arctan\left(-\frac{1.839}{-0.677}\right) = 20.215^\circ$

$$\nu_{\max 2} = \arctan\left(-\frac{c(\varphi_{\max 2})}{s(\varphi_{\max 2})}\right) = \arctan\left(-\frac{-0.918}{0.490}\right) = 28.090^\circ.$$

1. Anmerkung:

Wir betrachten den Fall $\varphi = \varphi_i$ näher. Der Reflexionspunkt P fällt mit einem Endpunkt P_i zusammen. Das Reflexionsdreieck $P_1 P P_2$ entartet zu einer Geraden der Länge $s(\varphi) = |P_1 P_2|$. In einem nicht ausgeartetem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die Dritte, d.h. für $\varphi \neq \varphi_i$ ist $s(\varphi) > |P_1 P_2|$. Die Längenfunktion $s(\varphi)$ besitzt an den Stellen $\varphi = \varphi_i$ ein Minimum in Form einer Spitze. Wegen $s_i(\varphi_i) = 0$ existiert nicht die Ableitung $s_i'(\varphi_i)$, also ist die in den Herleitungen benutzte Forderung $s'(\varphi) = 0$ bzw. $F_x(x, y) = 0$ nicht erfüllt.

Der Fall $P = P_i$ ist in der Aussage (150) auszuschließen. (150a)

Der Begriff einer Winkelhalbierenden hat in diesem Fall auch keinen Sinn.

Ergänzend ermitteln wir die Tangentenanstiege $s'(\varphi)$ in Nähe der Stelle $\varphi = \varphi_1$.

$$s_1'(\varphi) = \frac{(x(\varphi) - x(\varphi_1)) \cdot x'(\varphi) + (y(\varphi) - y(\varphi_1)) \cdot y'(\varphi)}{s_1(\varphi)} = \frac{(x - x_1) \cdot x'(\varphi) + (y - y_1) \cdot y'(\varphi)}{|x - x_1| \cdot \sqrt{1 + (y - y_1)^2 / (x - x_1)^2}}, \quad \varphi \neq \varphi_1,$$

$$s_1'(\varphi_1 \mp 0) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1 \mp 0} s_1'(\varphi) = \pm \frac{x'(\varphi_1) + \tan(\tau_1) \cdot y'(\varphi_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(\tau_1)}}, \quad \tan(\tau_1) = \frac{s(\varphi_1)}{c(\varphi_1)}, \quad (\varphi < \varphi_1 \Rightarrow x > x_1!),$$

$$s_1'(\varphi_1 \mp 0) = \pm \frac{s(\varphi_1) \cdot x'(\varphi_1) + c(\varphi_1) \cdot y'(\varphi_1)}{\sqrt{c(\varphi_1)^2 + s(\varphi_1)^2}} = \pm \frac{s(\varphi_1) \cdot x'(\varphi_1) + c(\varphi_1) \cdot y'(\varphi_1)}{\mathbf{p}(\varphi_1)},$$

$$s'(\varphi_1 \mp 0) = s_2'(\varphi_1) + s_1'(\varphi_1 \mp 0) = -0,0364 \pm (-0,9014) = \begin{cases} -0.9381 \\ 0.8647 \end{cases}. \text{ Siehe Kurvenbild!}$$

2. Anmerkung:

Die Aussage (150) kann wie folgt ergänzt werden.

Liegen P_1 und P_2 auf der $Ek(n)$, so ist das Extremum ein Maximum. (150b)

Sei $\varphi_2 < \varphi_1$, so ist $s(\varphi)$ z.B. im abgeschlossenen Intervall $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$ stetig, also auch beschränkt und besitzt ein Maximum. Wegen $s(\varphi_1) = s(\varphi_2) < s(\varphi)$ für $\varphi_2 < \varphi < \varphi_1$ existiert die Maximalstelle φ_{\max} im Intervallinneren. Aus der Differenzierbarkeit von $s(\varphi)$ gilt nach dem Satz von Rolle $s'(\varphi_{\max}) = 0$.

Wir können die Ergebnisse auf beliebige der $Ek(n)$ einbeschriebene m -Ecke ausweiten. Sollen diese m -Ecke perfekte Reflexionspolygone sein, so müssen für jeden Eckpunkt P_k bzgl. seiner Nachbarpunkte die Extremalforderungen (149) bzw. (151) erfüllt werden.

Dies ist sicherlich erfüllt, wenn das m -Eck wegen (150b) einen maximalen Umfang hat.

Mit unserer gewählten Bezeichnung erhalten wir die Aussage

Das einbeschriebene m -Eck maximalen Umfangs ist ein perfektes Reflexionsviereck. (153)

Diese Aussage kann für beliebige geschlossene konvexe Kurven formuliert werden. Wir verweisen auf das Kapitel von BOLTJANSKI und JAGLOM in der Enzyklopädie der Elementarmathematik.⁴¹ Dort wird auch gezeigt, dass im Kreis die regelmäßigen m -Ecke maximalen Umfang haben.

Auf der Suche nach perfekten Reflexionsvierecken in der $Ek(n)$ müssen aber auch lokale Extrema des Umfangs berücksichtigt werden, so dass entsprechend den Extremalforderungen folgendes Gleichungssystem erfüllt sein muss, als

notwendige Bedingung für ein perfektes Reflexions- m -Eck

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_k} s(\varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (154)$$

Darin sind die φ_k die Polarwinkel der Eckpunkte $P_k(x(\varphi_k), y(\varphi_k))$ des m -Ecks und es gelten

$$x(\varphi_k) = \cos^{n+1}(\varphi_k), \quad y(\varphi_k) = \cos^n(\varphi_k) \cdot \sin(\varphi_k), \quad \varphi_{-1} = \varphi_m, \quad \varphi_{m+1} = \varphi_1,$$

$$s(\varphi_k) = \sqrt{[x(\varphi_{k-1}) - x(\varphi_k)]^2 + [y(\varphi_{k-1}) - y(\varphi_k)]^2} + \sqrt{[x(\varphi_k) - x(\varphi_{k+1})]^2 + [y(\varphi_k) - y(\varphi_{k+1})]^2} \\ = s_1(\varphi_k) + s_2(\varphi_k)$$

Der zugehörige Umfang des m -Ecks ist $u = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^m s(\varphi_k) = \sum_{k=1}^m s_1(\varphi_k)$.

Die Lösungen φ_k , $k = 1, 2, \dots, m$ des Gleichungssystems (154) können in der Regel nur in numerischer Näherung ermittelt werden. Dafür bietet sich u. a. die in der Fußnote 40 genannte Mathcad-Routine an. Es sind in diesem Fall auch keine expliziten Formeln der partiellen Ableitungen vorzugeben.

Wir zeigen nachfolgend drei Rechenbeispiele. Gesucht sind perfekte Reflexionsviereck im Kreis $Ek(1)$ bzw. in der Eikurve $Ek(3)$.

⁴¹ Siehe Fußnote 38. Kapitel Geometrische Extremwertaufgaben, § 2.6. Einbeschriebene Vielecke.

n := 1 $r(\varphi) := \cos(\varphi)^n$ $x(\varphi) := \cos(\varphi)^{n+1}$ $y(\varphi) := \cos(\varphi)^n \cdot \sin(\varphi)$

$s_1(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\alpha) - x(\beta))^2 + (y(\alpha) - y(\beta))^2}$

$s_2(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\beta) - x(\gamma))^2 + (y(\beta) - y(\gamma))^2}$ $S(\alpha, \beta, \gamma) := s_1(\alpha, \beta, \gamma) + s_2(\alpha, \beta, \gamma)$

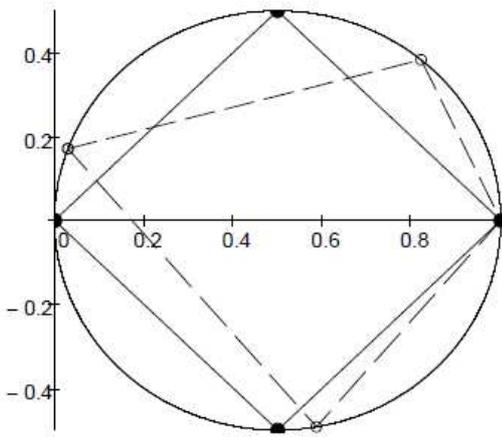
Näherungswerte $\varphi_1 := 80^\circ$ $\varphi_2 := 25^\circ$ $\varphi_3 := 0^\circ$ $\varphi_4 := -40^\circ$

Schlüsselwort

Vorgabe $\frac{\partial}{\partial \varphi_1} s(\varphi_4, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ $\frac{\partial}{\partial \varphi_2} s(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$

$\frac{\partial}{\partial \varphi_3} s(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0$ $\frac{\partial}{\partial \varphi_4} s(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_1) = 0$

Lösung $\varphi := \text{Suchen}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 90 \\ 45 \\ 0 \\ -45 \end{pmatrix} .^\circ$



Eckpunktkoordinaten

$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ $\vec{y}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

Seitenlängen $S(\alpha, \beta) := s_1(\alpha, \beta, \gamma)$

$S(\varphi_1, \varphi_2) = 0.5 \cdot \sqrt{2}$ $S(\varphi_3, \varphi_4) = 0.5 \cdot \sqrt{2}$

$S(\varphi_2, \varphi_3) = 0.5 \cdot \sqrt{2}$ $S(\varphi_4, \varphi_1) = 0.5 \cdot \sqrt{2}$

Umfang $\varphi_5 := \varphi_1$ $U := \sum_{k=1}^4 S(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ $U = 2 \cdot \sqrt{2}$

(1)

Die Routine liefert mit den vorgegebenen (gestrichelten) Näherungswerten ein Quadrat als perfektes Reflexionsviereck. Damit sind alle (kongruenten!) einbeschriebenen Quadrate Reflexionsvierecke. Sie entstehen aus der obigen Lösung durch Drehung um einen beliebigen Zentriwinkel $2 \cdot \alpha$. Die zugehörigen Polarwinkel ergeben sich aus der obigen Lösung durch Addition des Peripheriewinkels α : $\varphi_{k;neu} = \varphi_k + \alpha$. Es genügt $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ zu wählen, um alle möglichen Lagen zu bestimmen.

(Die Winkel sind auf das Intervall $-\pi/2 \leq \varphi_{k;neu} \leq \pi/2$ zu transformieren.)

n := 3 $r(\varphi) := \cos(\varphi)^n$ $x(\varphi) := \cos(\varphi)^{n+1}$ $y(\varphi) := \cos(\varphi)^n \cdot \sin(\varphi)$

$$s_1(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\alpha) - x(\beta))^2 + (y(\alpha) - y(\beta))^2}$$

$$s_2(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\beta) - x(\gamma))^2 + (y(\beta) - y(\gamma))^2}$$

$$s_{\text{ges}}(\alpha, \beta, \gamma) := s_1(\alpha, \beta, \gamma) + s_2(\alpha, \beta, \gamma)$$

Näherungswerte $\varphi_1 := 70^\circ$ $\varphi_2 := 20^\circ$ $\varphi_3 := 10^\circ$ $\varphi_4 := -40^\circ$

Schlüsselwort

Vorgabe

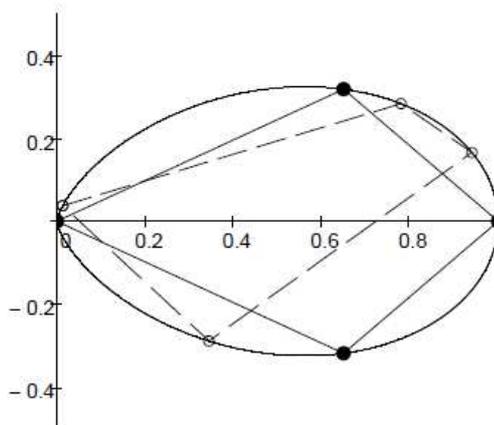
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} s(\varphi_4, \varphi_1, \varphi_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} s(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_3} s(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_4} s(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_1) = 0$$

Lösung $\varphi := \text{Suchen}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 89.68 \\ 26.11 \\ -0 \\ -26.11 \end{pmatrix} .^\circ$



Eckpunktkoordinaten

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 1 \\ 0.65 \end{pmatrix} \quad \vec{y}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.319 \\ 0 \\ -0.319 \end{pmatrix}$$

Seitenlängen $s_{\text{ges}}(\alpha, \beta) := s_1(\alpha, \beta, \gamma)$

$$S(\varphi_1, \varphi_2) = 0.724$$

$$S(\varphi_4, \varphi_1) = 0.724$$

$$S(\varphi_2, \varphi_3) = 0.473$$

$$S(\varphi_3, \varphi_4) = 0.473$$

Umfang $\varphi_5 := \varphi_1$ $U := \sum_{k=1}^4 S(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ $U = 2.394$

(2)

Die vorgegebenen Näherungswerte liefern eine Lösung, die schon im Abschnitt 5.5., Seite 38 exakt bestimmt wurde!

Geringe Änderungen der Näherungswerte führen auf ein weiteres perfektes Reflexionsviereck, das aber ebenfalls symmetrisch zur x-Achse liegt. (Siehe Seite 109). Die Umfänge sind lokale Maxima, die sich jedoch unterscheiden. Eine Aussage zum globalen Maximum kann mit (154) nicht getroffen werden.

Zum Vergleich die Umfänge der Näherungsvierecke: (2) $U_{\text{näh}} = 2.219$, (3) $U_{\text{näh}} = 2.092$, die kleiner sind als die Umfänge der perfekten Vierecke.

n := 3 $r(\varphi) := \cos(\varphi)^n$ $x(\varphi) := \cos(\varphi)^{n+1}$ $y(\varphi) := \cos(\varphi)^n \cdot \sin(\varphi)$

$s_1(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\alpha) - x(\beta))^2 + (y(\alpha) - y(\beta))^2}$

$s_2(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{(x(\beta) - x(\gamma))^2 + (y(\beta) - y(\gamma))^2}$ $S(\alpha, \beta, \gamma) := s_1(\alpha, \beta, \gamma) + s_2(\alpha, \beta, \gamma)$

Näherungswerte $\varphi_1 := 50^\circ$ $\varphi_2 := 30^\circ$ $\varphi_3 := 10^\circ$ $\varphi_4 := -40^\circ$

Schlüsselwort

Vorgabe

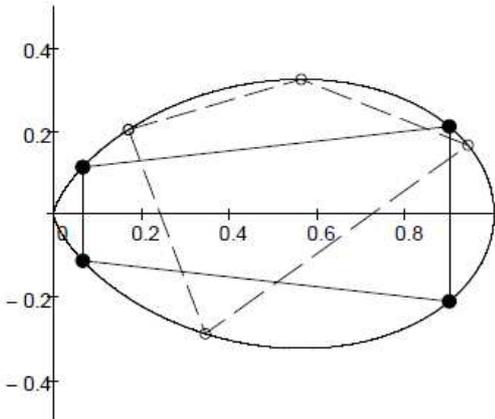
$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} S(\varphi_4, \varphi_1, \varphi_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_3} S(\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_4} S(\varphi_3, \varphi_4, \varphi_1) = 0$$

Lösung $\varphi := \text{Suchen}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \begin{pmatrix} 59.48 \\ 13.21 \\ -13.21 \\ -59.48 \end{pmatrix} .^\circ$



Eckpunktkoordinaten

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0.067 \\ 0.898 \\ 0.898 \\ 0.067 \end{pmatrix} \quad \vec{y}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.211 \\ -0.211 \\ -0.113 \end{pmatrix}$$

Seitenlängen $S(\alpha, \beta) := s_1(\alpha, \beta, \gamma)$

$$S(\varphi_1, \varphi_2) = 0.838$$

$$S(\varphi_4, \varphi_1) = 0.226$$

$$S(\varphi_2, \varphi_3) = 0.422$$

$$S(\varphi_3, \varphi_4) = 0.838$$

Umfang $\varphi_5 := \varphi_1$ $U := \sum_{k=1}^4 S(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ $U = 2.322$

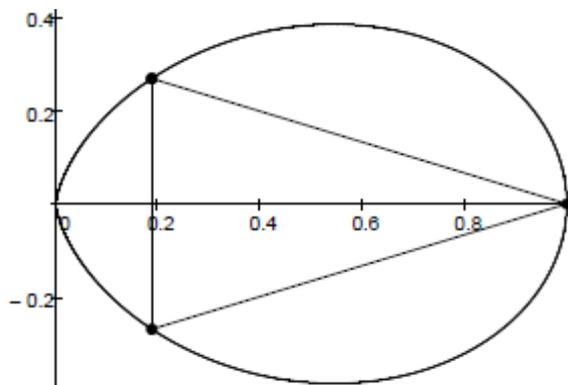
(3)

Offen bleibt für $n > 1$ die Frage nach der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems (154). Aus einer endlichen Anzahl ließe sich auch das globale Maximum des Umfangs ermitteln.

Etlliche numerische Versuche mit unterschiedlichen Näherungswerten legen nahe, dass nur endlich viele Lösungen (einschließlich Entartungen mit zusammenfallenden Eckpunkten) existieren und alle Lösungen symmetrisch zur x-Achse sind.

Einige Ergebnisse sind nachfolgend zusammengestellt.

Perfekte Reflexionsvielecke in der $Ek(2)$

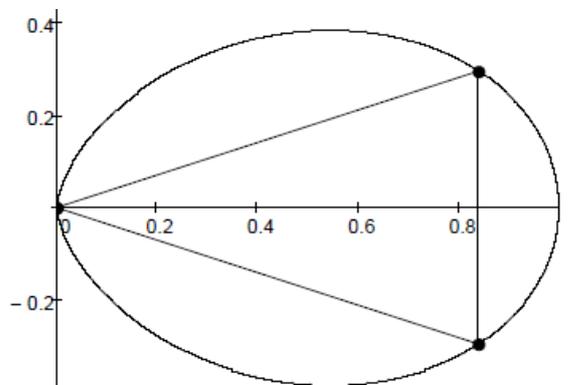


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.962 \\ 0 \\ -0.961 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.249$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.187 \\ 1 \\ 0.187 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.269 \\ 0 \\ -0.269 \end{pmatrix}$$

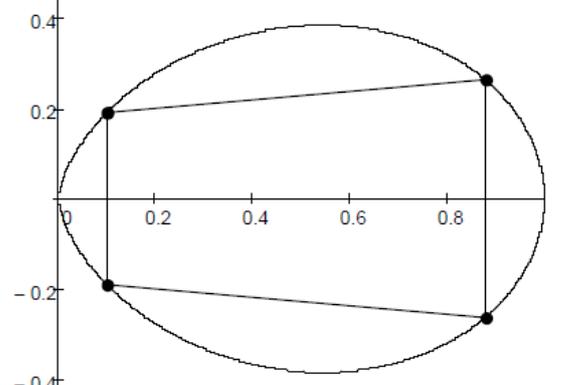


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ 0.34 \\ -0.34 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.370$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.838 \\ 0.838 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.296 \\ -0.296 \end{pmatrix}$$

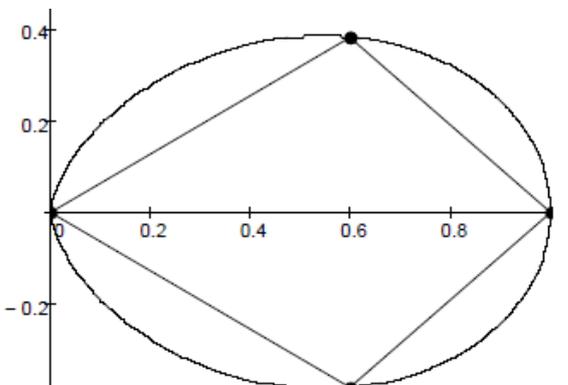


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.088 \\ 0.292 \\ -0.292 \\ -1.088 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.473$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.879 \\ 0.879 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.191 \\ 0.264 \\ -0.264 \\ -0.191 \end{pmatrix}$$

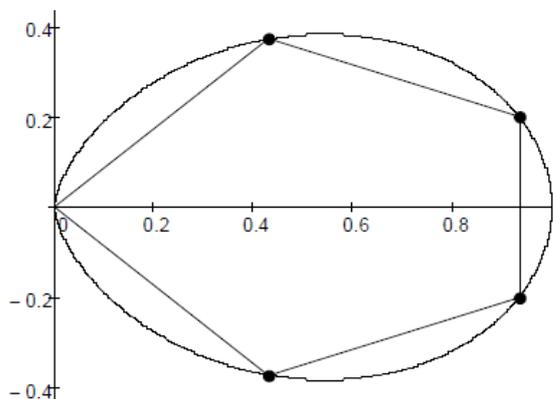


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.568 \\ -0 \\ -0.568 \\ -1.569 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.529$$

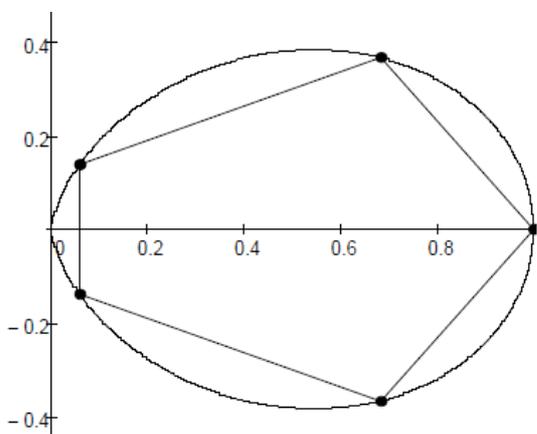
$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.599 \\ 1 \\ 0.599 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.382 \\ -0 \\ -0.382 \\ 0 \end{pmatrix}$$



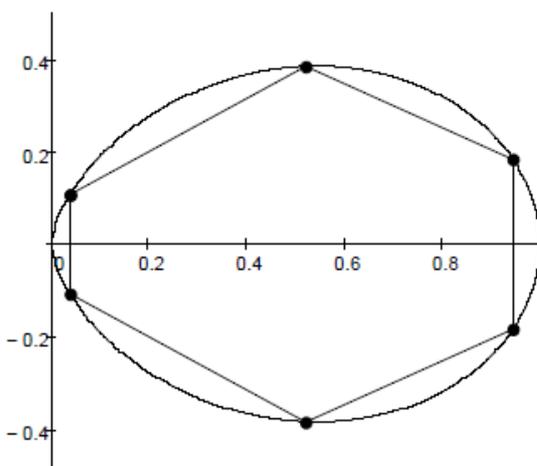
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ 0.715 \\ 0.213 \\ -0.213 \\ -0.715 \end{pmatrix} \quad U = 2.608$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.43 \\ 0.934 \\ 0.934 \\ 0.43 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.374 \\ 0.202 \\ -0.202 \\ -0.374 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.169 \\ 0.494 \\ 0 \\ -0.494 \\ -1.169 \end{pmatrix} \quad U = 2.578$$

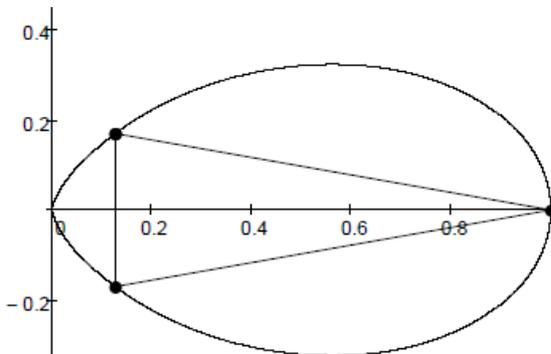
$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.683 \\ 1 \\ 0.683 \\ 0.06 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.141 \\ 0.368 \\ 0 \\ -0.368 \\ -0.141 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.224 \\ 0.636 \\ 0.193 \\ -0.193 \\ -0.636 \\ -1.224 \end{pmatrix} \quad U = 2.635$$

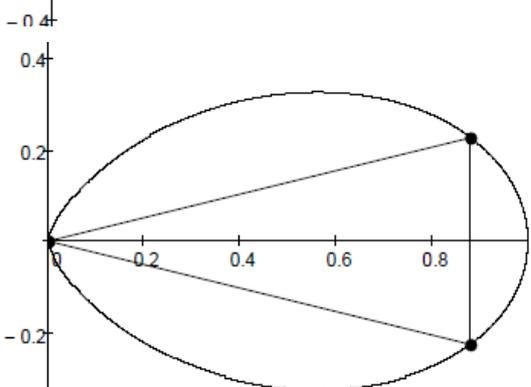
$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \\ x(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.039 \\ 0.521 \\ 0.945 \\ 0.945 \\ 0.521 \\ 0.039 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \\ y(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.109 \\ 0.384 \\ 0.185 \\ -0.185 \\ -0.384 \\ -0.109 \end{pmatrix}$$

Perfekte Reflexionsvielecke in der $Ek(3)$



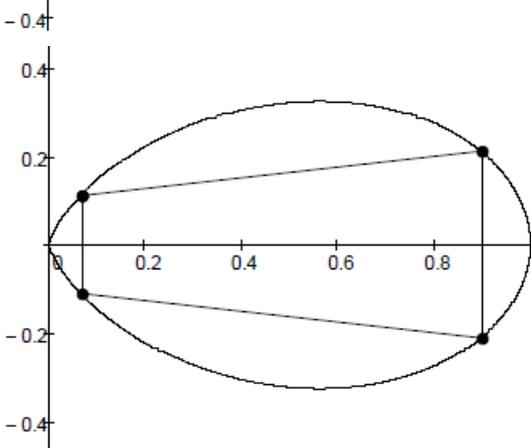
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.932 \\ 0 \\ -0.932 \end{pmatrix} \quad U = 2.120$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.126 \\ 1 \\ 0.126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0 \\ -0.17 \end{pmatrix}$$



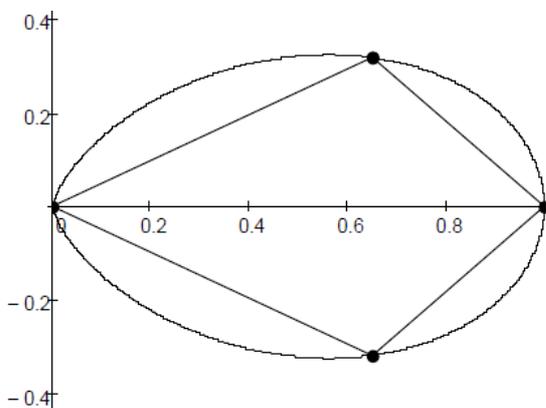
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ 0.253 \\ -0.253 \end{pmatrix} \quad U = 2.269$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.879 \\ 0.879 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.227 \\ -0.227 \end{pmatrix}$$



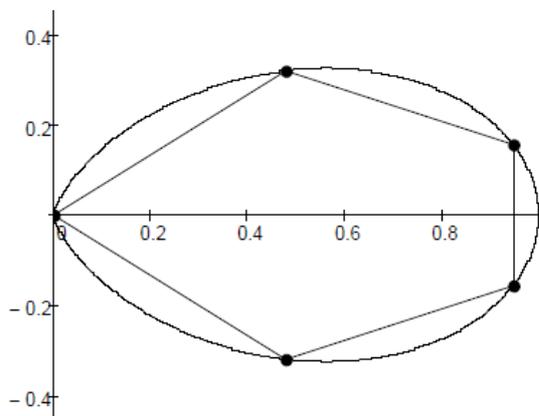
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.038 \\ 0.231 \\ -0.231 \\ -1.038 \end{pmatrix} \quad U = 2.322$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.067 \\ 0.898 \\ 0.898 \\ 0.067 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.113 \\ 0.211 \\ -0.211 \\ -0.113 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.456 \\ 0 \\ -0.456 \\ -1.567 \end{pmatrix} \quad U = 2.394$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 1 \\ 0.65 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.319 \\ 0 \\ -0.319 \\ 0 \end{pmatrix}$$

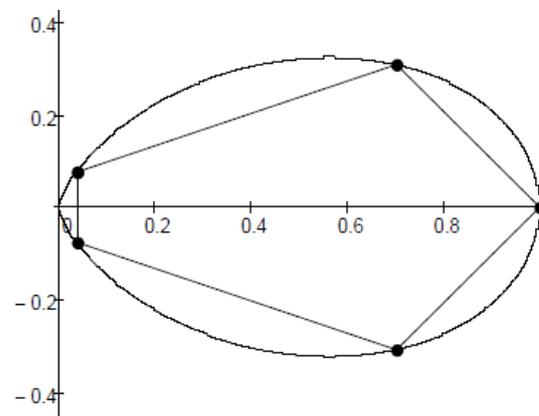


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ 0.589 \\ 0.162 \\ -0.162 \\ -0.589 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.457$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.478 \\ 0.949 \\ 0.949 \\ 0.478 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.319 \\ 0.155 \\ -0.155 \\ -0.319 \end{pmatrix}$$

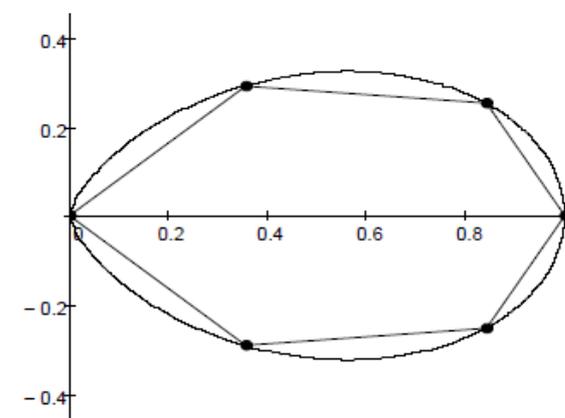


$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.116 \\ 0.415 \\ 0 \\ -0.415 \\ -1.116 \end{pmatrix}$$

$$U = 2.419$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.037 \\ 0.701 \\ 1 \\ 0.701 \\ 0.037 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.309 \\ 0 \\ -0.309 \\ -0.076 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.566 \\ 0.688 \\ 0.291 \\ 0 \\ -0.291 \\ -0.688 \end{pmatrix}$$

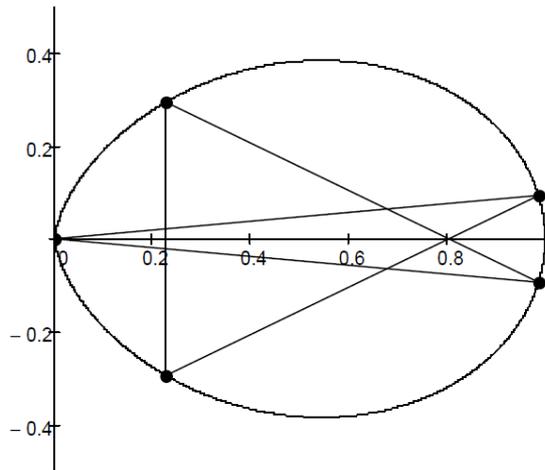
$$U = 2.493$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \\ x(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.357 \\ 0.842 \\ 1 \\ 0.842 \\ 0.356 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \\ y(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.293 \\ 0.252 \\ 0 \\ -0.252 \\ -0.293 \end{pmatrix}$$

Abschließend zwei nicht konvexe Reflexionsvielecke. Auch diese sind achsensymmetrisch.

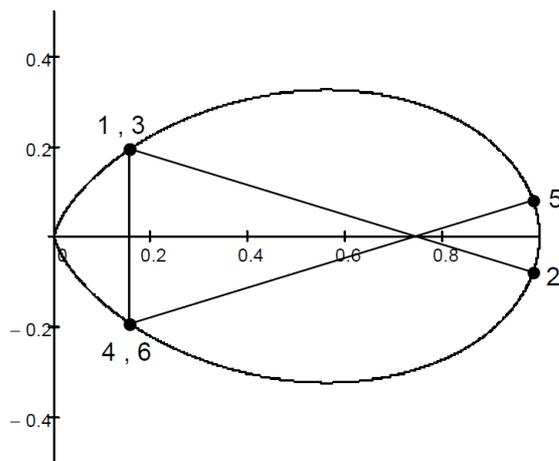
Perfektes Reflexionsfünfeck mit Kreuzung $Ek(2)$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.571 \\ -0.095 \\ 0.916 \\ -0.916 \\ 0.095 \end{pmatrix} \quad U = 4.278$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.987 \\ 0.226 \\ 0.226 \\ 0.987 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.094 \\ 0.294 \\ -0.294 \\ 0.094 \end{pmatrix}$$

Perfektes Reflexionssechseck mit Mehrfachstrecken $Ek(3)$



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.89 \\ -0.081 \\ 0.89 \\ -0.89 \\ 0.081 \\ -0.89 \end{pmatrix} \quad U = 4.271$$

$$\begin{pmatrix} x(\varphi_1) \\ x(\varphi_2) \\ x(\varphi_3) \\ x(\varphi_4) \\ x(\varphi_5) \\ x(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.157 \\ 0.987 \\ 0.157 \\ 0.157 \\ 0.987 \\ 0.157 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\varphi_1) \\ y(\varphi_2) \\ y(\varphi_3) \\ y(\varphi_4) \\ y(\varphi_5) \\ y(\varphi_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.194 \\ -0.08 \\ 0.194 \\ -0.194 \\ 0.08 \\ -0.194 \end{pmatrix}$$

Damit beenden wir die Exkursion durch das Gebiet der speziellen Eikurven und hoffen, dem Leser einige Anregungen zu eigenen mathematischen „Fingerübungen“ gegeben zu haben.

Literaturverzeichnis

Aufstellung der Literaturhinweise aus den Fußnoten

1. Print

- ATHEN/BRUHN: Lexikon der Schulmathematik, 4 Bd., Weltbild Augsburg 1994
- BOLTJANSKI/JAGLOM: Konvexe Figuren und Körper sowie Geometrische Extremwertaufgaben in der Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 5. DVW Berlin 1971.
- BRONSTEIN u.a.: Taschenbuch der Mathematik, H.Deutsch Frankfurt/Thun 4. Aufl. 1999
- FICHTENHOLZ: Differential- und Integralrechnung Bd 2, DVW Berlin 1971
- FISCHER: Ebene algebraische Kurven, Vieweg Braunschweig 1994
- FLADT: Das Keplersche Ei, Elemente der Mathematik Bd. 17 (1966) Heft 4
- FUCHS/TABACHNIKOV: Ein Schaubild der Mathematik, Springer Heidelberg u.a. 2011
- GELLERT/KÄSTNER/NEUBERT: Lexikon der Mathematik, BI Leipzig 1977
- GRADSTEIN/RYSHIK: Tafel 2 Bd., H.Deutsch Thun/Frankfurt 1981
- JAGLOM/BOLTJANSKI: Konvexe Figuren, DVW Berlin 1956
- JAHNKE/EMDE: Tafeln höherer Funktionen, Teubner Leipzig 1948
- KOECHER/KRIEG: Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer Berlin 1998
- LAWRENTJEW/SCHABAT: Methoden der komplexen Funktionentheorie, DVW Berlin 1967
- NAAS/SCHMID: Mathematisches Wörterbuch, 2 Bd. , Teubner, Akademie-Verlag Leipzig 1961
- PAPULA: Mathematische Formelsammlung, Vieweg 6. Aufl. 2000
- PEARSON: Tables of incomplete Beta-Functions, Cambridge 1968
- SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II, DVW Berlin 1955
- TABACHNIKOV: Geometrie und Billard, Springer Berlin, Heidelberg 2013
- TRICOMI/KRAFFT: Elliptische Funktionen, Geest&Portig Leipzig 1948
- WEISSTEIN; CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, CRC Press Florida(USA) 1999
- WIELEITNER: Spezielle ebene Kurven, Göschen Leipzig 1908 (*Nabu Public Domain Reprints*)

2. Computeralgebrasysteme

- MATHCAD[®]14.0, Parametric Technology Corporation (PTC), Needham USA 2007 www.ptc.com
- MAPLE[®]13, Maplesoft, US&Canada 2009 www.maplesoft.com

3. Internet

- ARTHUN/RENNERT: „Die Ei-Kurve als Schnitt des ..“, http://www.pks.or.at/Resources/Ei_-Kurve_plus.pdf
- <http://mathworld.wolfram.com/Folium.html>
- J. KÖLLER: Eilinie und Ovale, <http://www.mathematische-basteleien.de>
- Oval – Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Oval&printable=yes>
- https://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche_W_Funktion.
- L. EULER: Opera Omnia: Serie 1, Vol. 20 pp 58-79, Vol. 21 pp.39-56.
Als pdf-Dateien abrufbar unter <http://eulerarchive.maa.org/index.html>: E251, E581 (auch dt.)